LLOQUE HENRI POINCARÉ
stitut Henri Poincaré
11 rue Pierre Curie
P A R I S 5°

Octobre 1954

2ème conférence

Comparaison des constructions homotopiques

par Saunders MAC LANE.

5.- Anneau différentiel gradué

Soit A un anneau, toujours avec identité 1, et muni des structures uivantes :

Graduation. Le groupe additif de A est un groupe libre, et est somme irecte des sous-groupes A_p ($p = 0, 1, \ldots$) tels que $ab \in A_{p+q}$ si $a \in A_p$, $b \in A_q$; donc $1 \in A_0$. Disons que a est un élément homogène de dimension p si $a \in A_p$, et demandons que l'anneau soit anticommutatif ;

(21) $$ab = (-1)^{\dim a \dim b}\, ba.$$

Différentielle. C'est une application $\partial : A \longrightarrow A$ du groupe additif de A en soi, tel que

(22) $$\partial\partial = 0 \quad , \quad \partial A_p \subset A_{p-1} \quad , \qquad (A_{-1} = 0) \quad ,$$

(23) $$\partial(ab) = (\partial a)b + (-1)^{\dim a}\, a\partial b \; .$$

Augmentation. C'est une application $\varepsilon : A \longrightarrow Z$ telle que $\varepsilon\partial = 0$ et $\varepsilon a = 0$ si a est de dimension positive.

Un tel anneau A s'appelle un anneau différentiel gradué (DGA), augmenté et anticommutatif. Le groupe $H(A)$ d'homologie de A par rapport à la différentielle ∂ de A est un anneau gradué.

Chaque R- complexe R est un DGA par rapport à un produit Δ, tout à fait différent du produit donné dans chaque anneau R_p des éléments de dimension p de R. Pour la définition de ce produit Δ, appelons, pour chaque paire (p, q) d'entiers, un (p, q) "shuffle" un système d'entiers

$$0 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \quad , \quad 0 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_q$$

tel que $\mu_1, \ldots, \mu_p$, $\nu_1, \ldots, \nu_q$ soit une permutation des chiffres $0, 1, \ldots, p+q-1$. Désignons par $\varepsilon(\mu)$ le signum de cette permutation. Pour deux éléments $a \in R_p$, $b \in R_q$, posons

$$a \Delta b = \sum (-1)^{\varepsilon(\mu)} (D_{\nu_q} \ldots D_{\nu_1} a)(D_{\mu_p} \ldots D_{\mu_1} b) , \tag{24}$$

la somme étant sur tous les "shuffles" μ , ν . Le complexe R , avec ce produit Δ et l'augmentation $\varepsilon = \alpha$ donnée, devient un DGA (Les détails sont données en [2], paragraphe 6).

6.- <u>Construction</u>

Certaines structures algébriques fibrées, ayant pour fibre un DGA et avec les propriétés (i) (ii) de l'introduction, s'appellent constructions. En suivant les idées générales de Cartan [2], une <u>construction</u> (A,N,M) pour A , un DGA, consiste en la donnée d'un groupe abélien libre N , gradué, et tel que le sous groupe N_0 des éléments de dimension 0 soit le groupe additif Z des entiers, et d'une differentielle sur le A-module gradué à gauche $M = A \otimes N$, telle que

$$\partial(am) = (\partial a)m + (-1)^{\dim a} a \partial m \quad , \qquad a \in A \ , \ m \in M \tag{25}$$

et telle que M , muni de l'augmentation ε définie par $\varepsilon(a \otimes 1) = \varepsilon a$, soit acyclique. En donnant une projection $\eta : M = A \otimes N \longrightarrow N$ par la formule $\eta(a \otimes n) = \varepsilon(a)n$, on identifie N à un groupe quotient de M , et la différentielle passe au quotient. Muni de cette projection $\eta : M \longrightarrow N$ on a une structure fibrée, de fibre A et de base N , ayant les propriétés (i) et (ii) de paragraphe 1. (Les définitions des constructions citées de [1] sont plus générales ; structure multiplicative pour N et M ; anneau de base Λ au lieu de Z).

Cartan a démontré un théorème de comparaison des constructions ; en particulier, étant données deux constructions (A, N, M) et (A, N', M') sur le même A , il existe toujours une application $M \longrightarrow M'$ qui induit un isomorphisme canonique $H(N) \cong H(N')$.

7.- <u>Le "bar-construction"</u>

On a une construction canonique, le "bar-construction" $(A, \bar{B}(A), B(A))$;

pour cette construction, la propriété d'acyclicité est donnée par un opérateur s d'homotopie, tel que

(26) $$\partial s + s\partial = I - \varepsilon \quad .$$

Les éléments de $B(A)$ sont exactement les éléments a, bsa, $cs(bsa)$ engendrés par s et la structure de A- module à gauche. Les éléments de $\bar{B}(A)$ sont alors les symboles multilinéaires (avec la notation de "bar").

(27) $$u = [\ell_1 | \ldots | \ell_n] = s(\ell_1 s(\ell_2 s(\ldots \ell_n)\ldots)) \; . \qquad b_i \in A$$

La dimension de u est alors $\sum(\dim b_i + 1)$; les règles (26) et (25) donnent la différentielle de u :

(28) $$\partial[\ell_1|\ldots|\ell_n] = \ell_1[\ell_2|\ldots|\ell_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_i}[\ell_1|\ldots|\ell_i\ell_{i+1}|\ldots|\ell_n]$$
$$+ (-1)^{\varepsilon_{n-1}}[\ell_1|\ldots|\ell_{n-1}]\varepsilon(\ell_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_{i-1}+1}[\ell_1|\ldots|\partial\ell_i \ldots|\ell_n] ,$$

où $\varepsilon_i = \dim[\ell_1|\ldots|\ell_i]$. On a aussi un produit appelé $*$ des éléments de $\bar{B}(A)$; le produit de $[\ell_1|\ldots|\ell_n]$ et de $[c_1|\ldots|c_m]$ est une somme (avec des signes) de tous les "shuffles" de $\ell_1,\ldots,\ell_n$ avec $c_1,\ldots,c_m$. La définition exacte est donnée par récurrence, pour des éléments $b, c \in A$; $u, v \in \bar{B}(A)$, par :

$$[b|u] * [c|v] = [b|u * (c|v)] + (-1)^{\beta}[c|(b|u) * v] ,$$

$\beta = \dim[c]\dim[b|u]$. Donc $\bar{B}(A)$ et $B(A)$ sont des anneaux DGA , et $B(A)$ est acyclique, avec l'homotopie :

$$s \quad a[\ell_1|\ldots|\ell_n] = [a|\ell_1|\ldots|\ell_n].$$

La base $\bar{B}(A)$ a été découverte par Eilenberg-Mac Lane [2], la construction B acyclique par Cartan [1]. Par la suite, nous prenons $B(A)$ et $\bar{B}(A)$ toujours normalisés, modulo les éléments $[\ell_1|\ldots|\ell_n]$ où $\ell_i = 1$ pour au moins un i .

Le théorème principal de [2], démontré sans emploi des constructions acycliques, st :

Théorème : Pour chaque R- complexe, il y a une application, pour la structure de DGA

$$g : \bar{B}(R) \longrightarrow \bar{W}(R)$$

qui est une équivalence de chaines, donc donne un isomorphisme pour les groupes d'homologie.

Pour le calcul des groupes $H(\Pi, n) = H(K(\Pi, n)$ on a alors le procédé de récurrence suivant : Par le théorème de la première conférence, $K(\Pi, n)$ provient de $(\Pi, 0)$, l'anneau du groupe de Π, par application itérée de la construction $\bar{W}$. Le théorème précédent remplace la construction $\bar{W}$ simpliciale par la construction $\bar{B}$ (par récurrence, en utilisant quelques propriétés de B) ; pour les groupes Π particuliers, la théorie générale de Cartan remplace la construction $\bar{B}$ par des constructions spéciales plus maniables.

8.- Nouvelle démonstration

Grâce à des conversations, pendant ce Colloque Henri Poincaré, avec MM. H. Cartan et J. Moore, il est maintenant possible de donner une nouvelle démonstration du théorème 2 (comparaison de $\bar{B}$ et $\bar{W}$) en appliquant les propriétés des constructions acycliques B et W. Donnons les étapes principales de cette démonstration.

(i) Les constructions B, $\bar{B}$, W, $\bar{W}$ sont toutes normalisées. B et W sont alors modules à gauche sur l'anneau $A = R_N$ normalisé.

(ii) En suivant les idées géométriques de Serre [3], on prend dans W une filtration ; un élément $u \in W$ est de filtration p si la projection de u dans $\bar{W}$ a la forme $D_{\nu_q} \dots D_{\nu_1} b$, dim $b \leqslant p$. Cette filtration donne une suite croissante de A modules

$$A = W^0 \subset W^1 \subset \dots \subset W^p \subset \dots$$

(iii) Le théorème d'Eilenberg-Zilber ([2]II, chap.I) donne une application (de A - module)

$$W^p / W^{p-1} \longrightarrow A \otimes \bar{W}^p \quad .$$

Cette application commute avec la différentielle (à droite, la différentielle de A) et donne un isomorphisme pour l'homologie.

(iv) On construit de proche en proche une application $\bar{\alpha} : \bar{W} \longrightarrow W$ telle que le sous A - module $A \Delta \bar{\alpha} \bar{W}$ engendré par l'image $\bar{\alpha}\bar{W}$ soit stable pour la différentielle de W, et telle que $\bar{\alpha}$ soit l'identité sur un certain sous-complexe $\bar{U} \subset \bar{W}$. Le résultat (iii) démontre aussi que $A \Delta \bar{\alpha} \bar{W}$ est acyclique ; on a alors, plongé dans W, une construction $(A, \bar{W}, A \Delta \bar{\alpha} \bar{W})$ de base $\bar{W}$. La définition de $\bar{\alpha}$ de cette façon est une application d'une méthode inédite de H. Cartan.

(v) Une application $g : B(A) \longrightarrow W_N(R)$, $A = R_N$, est définie par induction par les formules

$$g a = a \quad , \quad g(a s u) = a \Delta t g u.$$

(s et t sont les homotopies données de B et de W). Cette application plonge $B(A)$ dans le sous-complexe $A \Delta \bar{\alpha} \bar{U}$ de $A \Delta \bar{\alpha} \bar{W}$.

(vi) On démontre que l'application $\bar{g} : \bar{B} \longrightarrow \bar{W}$ induite est un isomorphisme par l'homologie, en utilisant le théorème de Cartan pour la comparaison des constructions. Cette application quotient est, bien entendu, la même application qui était déjà utilisée par Eilenberg-Mac Lane (définie par le produit $\downarrow$ de [2]).

9.- Problèmes futurs

La construction $W(R)$ est bien un produit cartésien "tordu" de R et de $\bar{W}(R)$. Il est possible que des méthodes analogues soient valables pour d'autres produits tordus, notamment pour les complexes de Postnikoff-Zilber. Ces complexes sont les complexes minimaux des espaces avec plus d'un groupe non-trivial d'homotopie. Si π est le groupe d'homotopie non-trivial dans la dimension n la plus grande, ces complexes sont des "espaces" fibrés inverses induits par des applications dans la base $K(\pi, n+1)$ de l'espace fibré $L(\pi, n) \longrightarrow K(\pi, n+1)$, et sont des produits "tordus" de fibre $K(\pi, n)$.

Les références bibliographiques utilisées dans cet exposé sont les mêmes que dans l'exposé précédent.
