

CONSTRUCTIONS SIMPLICIALES ACYCLIQUES

par Saunders MAC LANE.

--:--

1.- Espaces de type  $\mathcal{K}(\Pi, n)$ .

Soit  $\Pi$  un groupe abélien (multiplicatif). Un espace topologique  $X$ , connexe par arcs, est du type  $\mathcal{K}(\Pi, n)$  si

$$\pi_n(X) = \Pi, \quad \pi_q(X) = 1, \quad q \neq n;$$

ce qui veut dire que  $\Pi$  est le seul groupe non trivial d'homotopie de  $X$ , dans la dimension  $n$ . Le groupe d'homologie de  $X$  ne dépend que de  $\Pi$  et  $n$ , et s'écrit  $\mathcal{K}(\Pi, n)$ .

Espaces fibrés acycliques : Soit  $X$  un espace de type  $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$ ,  $x_0$  un point choisi de  $X$ , et  $E$  l'espace des chemins, dans  $X$ , qui commencent en  $x_0$ . L'application  $p: E \rightarrow X$ , qui renvoie chaque chemin dans son point terminal, fait de  $E$  un espace fibré de base  $X$  (SERRE [3]). La fibre (image inverse de  $x_0$ ) est l'espace des lacets dans  $X$  au point  $x_0$  et est un espace de type  $\mathcal{K}(\Pi, n)$ . L'opération usuelle du produit des chemins donne une opération de la fibre sur l'espace total  $E$ . Cet espace  $E$  est contractible, donc d'homologie triviale.

La transition d'un espace  $\mathcal{K}(\Pi, n)$  à un espace  $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$  se fait alors par un espace fibré  $E$  de fibre  $\mathcal{K}(\Pi, n)$ , de base  $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$ , et telle que

- (i) la fibre opère sur l'espace  $E$ ,
- (ii) l'espace  $E$  est acyclique.

Il s'agit des constructions algébriques pour  $H(\Pi, n)$ . En utilisant le "bar-construction" de Eilenberg - Mac Lane, Cartan [1] a donné une théorie des constructions algébriques avec les propriétés (i) et (ii), pour les structures algébriques des algèbres différentielles graduées. Nous donnons maintenant une construction parallèle pour les structures simpliciales.

2.- Les structures simpliciales.

Convention.: Chaque anneau a une identité ; chaque application d'anneau envoie l'identité dans l'identité.

Un R-complexe commutatif est un système d'anneaux commutatifs  $R_0, R_1, \dots, R_q, \dots$  et d'applications d'anneau

$$(1) \quad F_i : R_q \longrightarrow R_{q-1} \quad , \quad D_i : R_q \longrightarrow R_{q+1} \quad , \quad i = 0, \dots, q \quad ,$$

définies pour chaque  $q > 0$  et telles que

$$(2) \quad F_i F_j = F_{j-1} F_i \quad , \quad D_j D_i = D_i D_{j-1} \quad , \quad i < j \quad ,$$

$$(3) \quad F_i D_j = D_{j-1} F_i \quad , \quad i < j \quad ; \quad F_i D_j = D_j F_{i-1} \quad , \quad i > j+1 \quad ,$$

$$(4) \quad F_i D_i = F_{i+1} D_i = I \quad (I = \text{identité}) \quad .$$

Notons  $1_q$  l'identité de  $R_q$  , par convention

$$(5) \quad F_i 1_q = 1_{q-1} \quad , \quad D_i 1_q = 1_{q+1} \quad , \quad i = 0, \dots, q \quad , \quad q > 0 \quad .$$

Une augmentation de  $R$  est une application  $\alpha : R_0 \longrightarrow Z$  ( $Z =$  anneau des entiers) telle que  $\alpha F_0 = \alpha F_1$  .

Une R-application  $\rho : R \longrightarrow S$  d'un R-complexe  $R$  dans un autre  $S$  est un système d'applications  $\rho_q : R_q \longrightarrow S_q$  d'anneau ,  $q = 0, 1, \dots$  , telle que

$$(6) \quad \rho_q F_i = F_i \rho_{q+1} \quad , \quad \rho_{q+1} D_i = D_i \rho_q \quad , \quad \alpha \rho_0 = \alpha \quad .$$

On obtient un R-complexe  $Z'$  en mettant  $Z'_q = Z$  ,  $F_i = D_i = \alpha =$  application identique. Chaque augmentation  $\alpha$  de  $R$  donne une R-application  $\bar{\alpha} : R \longrightarrow Z'$  (l'augmentation forte) définie par  $\bar{\alpha}_q a = \alpha(F_0^q a)$  ,  $a \in R_q$  .

Notons  $\hat{R}$  le noyau de  $\bar{\alpha}$  .

La différentielle de  $R$  est l'application  $\partial : R_q \longrightarrow R_{q+1}$  définie par

$$(7) \quad \partial = F_0 - F_1 + \dots + (-1)^q F_q \quad .$$

Comme conséquence de (2) , on a  $\partial\partial = 0$  ; donc  $R = \sum_q R_q$  est un groupe différentiel gradué (= "chain complex"). Le sous-groupe  $DR$  engendré par tous les éléments  $D_i a$  est stable pour la différentielle  $\partial$  . Le quotient  $R/DR$  est aussi un groupe différentiel gradué, et s'appelle le complexe normalisé de  $R$  .

L'application canonique  $R \longrightarrow R/DR$  est un isomorphisme pour l'homologie

("chain equivalence").

Soit  $R$  un sous- $R$ -complexe d'un  $R$ -complexe commutatif et augmenté  $W$ , et  $\hat{R}W$  l'idéal engendré dans chaque dimension par les produits  $rW$ ,  $r \in \hat{R}$ . Le quotient  $\bar{W} = W/\hat{R}W$  est aussi un  $R$ -complexe, commutatif et augmenté, et l'application  $p: W \rightarrow \bar{W}$  une  $R$ -application.

### 3.- La construction acyclique $W$ .

Soit  $R$  un  $R$ -complexe, commutatif et augmenté. Nous définissons un  $R$ -complexe  $W$  par induction, en mettant

$$(8) \quad W_0 = R_0 \quad , \quad W_{q+1} = R_{q+1} \otimes W_q \quad , \quad q = 0, \dots$$

L'augmentation  $\alpha$  de  $W$  est égale à l'augmentation de  $R$ . Pour la dimension 1 les opérations  $F$  sont ( $a_i \in R_i$ )

$$(9) \quad F_0(a_1 \otimes a_0) = (F_0 a_1) a_0 \quad , \quad F_1(a_1 \otimes a_0) = (F_1 a_1) \alpha a_0$$

Pour les autres dimensions ( $a \in R_{q+1}$ ,  $w \in W_q$ ), posons :

$$(10) \quad F_0(a \otimes w) = (F_0 a) w \quad ,$$

$$(11) \quad F_{i+1}(a \otimes w) = F_{i+1} a \otimes F_i w \quad , \quad i = 0, \dots, q$$

$$(12) \quad D_0(a \otimes w) = D_0 a \otimes (1_{q+1} \otimes w)$$

$$(13) \quad D_{i+1}(a \otimes w) = D_{i+1} a \otimes D_i w \quad , \quad i = 0, \dots, q$$

L'application  $a_{q+1} \rightarrow a_{q+1} \otimes 1_q$ ,  $a_0 \rightarrow a_0$  est un  $R$ -monomorphisme de  $R$  dans  $W$ ; nous identifions  $R$  avec son image par cette application. Le quotient  $\bar{W}$  est alors un  $R$ -complexe. Il est identique avec un  $R$ -complexe défini dans [2; paragraphe 17] et y est appelé  $W(R)$ .

Le complexe  $W$  est acyclique. Une homotopie  $t: W_q \rightarrow W_{q+1}$ , donnée par  $t w_q = 1_{q+1} \otimes w_q$ , est telle que

$$(14) \quad F_0 t a_0 = a_0 \quad , \quad F_1 t a_0 = \alpha(a_0) 1_0 \quad ,$$

$$(15) \quad F_0 t w = w \quad , \quad F_{i+1} t w = t F_i w \quad , \quad w \in W_q \quad , \quad q > 0$$

On obtient la formule habituelle d'homotopie,  $\partial t + t \partial = I - \alpha$ , en regardant l'augmentation  $\alpha$  comme une application de  $W$  dans lui-même (avec l'identification  $1 = 1_0$  de  $Z$  avec des éléments de  $W_0$ ).

On a maintenant "l'espace" fibré  $p : W \dashrightarrow \bar{W}$ , avec une fibre donnée  $R$ , qui possède les propriétés (i) et (ii) de l'introduction.

4.- La construction minimale  $L(\Pi, n)$ .

Pour chaque  $q$ , soit  $\Delta_q$  un simplexe à  $q$  dimensions et de sommets  $(0, 1, \dots, q)$  ordonnés. Par l'application  $\varepsilon^i : \Delta_{q-1} \dashrightarrow \Delta_q$ , donnée par

$$(16) \quad \varepsilon^i(0, 1, \dots, q-1) = (0, \dots, i-1, i+1, \dots, q),$$

$\Delta_{q-1}$  devient la  $i$ -ième face de  $\Delta_q$ . L'application  $\eta^j : \Delta_{q+1} \dashrightarrow \Delta_q$ , donnée par :

$$(17) \quad \eta^j(0, 1, \dots, q+1) = (0, \dots, j-1, j, j, j+1, \dots, q),$$

place  $\Delta_{q+1}$  sur la  $j$ -ième position dégénérée de  $\Delta_q$ . Ces applications  $\varepsilon^i$  et  $\eta^j$  jouissent des propriétés duales des propriétés (2), (3), (4) de  $F_i$  et  $D_i$ .

Pour chaque groupe abélien multiplicatif  $\Pi$ , notons  $Z(\Pi)$  le "group ring" de  $\Pi$  avec coefficients entiers.

Soient  $C^n(\Delta_q; \Pi)$ , resp.  $Z^n(\Delta_q; \Pi)$  le groupe (multiplicatif) de cochaines, resp. de cocycles du simplexe  $\Delta_q$  avec coefficients dans  $\Pi$  (cf. [2], paragraphe 5), et prenons les anneaux :

$$(18) \quad L_q(\Pi, n) = Z(C^n(\Delta_q; \Pi)),$$

$$(19) \quad K_q(\Pi, n) = Z(Z^n(\Delta_q; \Pi)).$$

Les applications  $\varepsilon^i$  de (16) donnent des applications  $F_i : C^n(\Delta_q; \Pi) \dashrightarrow C^n(\Delta_{q-1}; \Pi)$  dans le sens inverse, donc des applications

$$F_i : L_q \dashrightarrow L_{q-1}, \quad F_i : K_q \dashrightarrow K_{q-1}.$$

De façon parallèle, les applications  $\eta^j$  donnent  $D_j : L_q \dashrightarrow L_{q+1}$ , resp.  $K_q \dashrightarrow K_{q+1}$ . Avec les applications  $F$  et  $D$  ainsi définies, les  $L_q$ , resp.  $K_q$ , forment un  $R$ -complexe  $L$ , resp.  $K$ .

Le complexe minimal singulier d'un espace  $X$  de type  $\mathcal{K}(\Pi, n)$  est isomorphe au complexe  $K(\Pi, n)$ . Ce dernier donne donc, de façon algébrique, des groupes  $H(\Pi, n)$ .

Le complexe  $L(\Pi, n)$  est acyclique, et contient  $K(\Pi, n)$  comme sous-complexe. Le complexe quotient  $\bar{L}$  de  $L$  par ce sous-complexe est isomorphe au complexe  $K(\Pi, n)$ .

(1) ; la projection canonique  $p : L(\pi, n) \dashrightarrow K(\pi, n+1)$  est l'application induite par l'opérateur cobord

$$\delta : C^n(\Delta_q ; \pi) \dashrightarrow Z^{n+1}(\Delta_q ; \pi) .$$

Il a donc les propriétés (i) , (ii) de l'introduction.

Théorème : Pour chaque groupe abélien  $\pi$  il y a un isomorphisme  $W(K(\pi, n)) \cong K(\pi, n)$  , réduit à l'identité sur le sous-complexe  $K(\pi, n+1)$  .

En conséquence, cet isomorphisme induit, sur les complexes quotients, un isomorphisme :

$$(20) \quad \bar{W}(K(\pi, n)) \cong K(\pi, n+1) .$$

---

Références bibliographiques :

- [1] H. CARTAN : Sur les groupes d'Eilenberg - Mac Lane  $H(\pi, n)$  , I : Méthode des constructions, Proc. nat. Acad. Sc., U.S.A., 40 (1954), p. 467-471 ; II : ibid., p. 704-707.
  - [2] S. EILENBERG et S. MAC LANE : On the groups  $H(\pi, n)$  , I and II , Ann. of Math., 58 (1953), p. 55-106 ; 60 (1954), p. 49-139 .
  - [3] J.P. SERRE : Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), p. 425-505 .
-