Оглавление

Глава 1

Введение

Квантовая теория калибровочных полей на сегодняшний день является наилучшим претендентом на описание взаимодействий элементарных частиц [1], [2]. По этой причине изучение калибровочных теорий, построение согласованных взаимодействий калибровочных полей, а также разработка методов их квантования оказываются одними из центральных вопросов современной теоретической физики.

Одной из первой работ, положившей начало построению квантовой теории калибровочных полей, является известная работа Л.Д. Фаддеева и В.Н. Попова [3], в которой был предложен простой метод описания квантовой теории калибровочных полей, основанный на использовании фейнмановского функционального интеграла. Дальнейшее развитие [4] как функциональных так и операторных методов квантования калибровочных теории позволило существенно расширить класс исходных полевых моделей, и в настоящее время методы квантования позволяют работать почти с любой калибровочной полевой теории, исключая лишь некоторый специальный класс теорий с определённым типом зависимости между генераторами калибровочной алгебры.

С точки зрения проблем квантования наиболее адекватной формулировкой калибровочной симметрии в классической теории является её описание в терминах гамильтоновой (или симплектической) редукция [5], [6]. В этом подходе физическое фазовое пространство теории отождествляется с фактором поверхности связей первого рода в расширенном фазовом пространстве по калибровочным преобразованиям, сгенерированным этими связями, а физические наблюдаемые отождествляются с калибровочно инвариантными функциями на расширенном фазовом пространстве, принимающими ненулевые значения на поверхности связей.

Одно из важных физических приложений гамильтоновой редукции связано с построением интегрируемых систем [7], [8]. Первоначально, интегрируемые системы рассматривались как кандидаты на роль моделей, адекватно описывающих свободные приближения конкретных физических систем. Однако в недавнее время было обнаружено, что динамика интегрируемых систем, возникающая на пространстве модулей полевых теории с расширенной суперсимметрией, позволяет получать точные (непертурбативные) результаты в соответствующей квантовой теории [9] (см. также обзор [10]), и одним из результатов такого характера является вычисление Зайбергом и Виттеном точной низкоэнергетической части эффективного потенциала $N = 2$ супер-симметричной теории Янга-Миллса [11], [12].

Развитие непертурбативных методов квантовой теории поля ни в какой мере не отменяет теорию возмущений, поскольку теория Зайберга-Виттена позволяет предсказать лишь определённую часть точных вкладов в эффективное действие, а подход, связанный с использованием дуальностей [13], [14], [15], [16] основывается на идее сведения определённых вопросов одной теории к пертурбативным вычислениям в другой. В связи с этим, проблемы, связанные с развитием пертурбативных методов, приобретают ещё большую актуальность.

Особый интерес по-прежнему представляют проблемы общекоординатной инвариантности пертурбативных методов квантования, а также проблемы адекватной работы с квантовой калибровочной симметрией. Опыт работы с калибровочными полевыми моделями показывает, что эти проблемы тесно связаны между собой. А именно, идеи квантовой редукции, такие например, как идеи методов БРСТ-квантования [4] (см. также обзор [5]), позволяют решить некоторые проблемы общекоординатной инвариантности квантовой теории. Причина этого состоит в том, что вопрос общекоординатной инвариантности или, по-просту, ковариантности может быть сведён к вопросу описания нелинейных многообразий в терминах редукционных процедур по аналогии с тем, как нелинейность большинства интересных физических моделей состоит в нетривиальной реализации их как систем со связями или по аналогии с тем как нелинейность большинства интегрируемых систем основана на нетривиальной формулировке этих систем в терминах процедуры гамильтоновой редукции.

Многочисленные примеры показывают, что идеи квантовой редукции могут также применяться к построению взаимодействия теоретико-полевых моделей, и одним из главных результатов в этом направлении является построение взаимодействующей теории классических полей высших спинов [17], [18]. Физические поля этой теории отождествляются с коэффициентами разложения функций на вспомогательном векторном расслоении над пространством-временем, а уравнения динамики этих полей определяются из уравнения квантовой редукции, наложенного на эти функции.

Одним из результатов, позволяющих решать проблемы ковариантности квантовой теории, является предложенный Федосовым [19] явно ковариантный метод деформационного квантования произвольной невырожденной скобки Пуассона. Идея метода Федосова состоит в расширении пространства функции исходного симплектического многообразия функциями на касательном расслоении к этому многообразию. При этом, скобка Пуассона исходного многообразия задаёт естественную структуру алгебры Вейля на этом расширенном пространстве, а решения уравнения квантовой редукции, которые строятся путём явно ковариантной пертурбативной процедуры, образуют подалгебру в этой алгебре. Эти решения естественным образом отождествляются с функциями на исходном многообразии, и это позволяет получить искомое звёздочка-произведение. Формулировка процедуры квантовой редукции Федосова в терминах БРСТ-теории, предложенная в работе [20], делает метод Федосова более адекватным к использованию привычного языка физических теорий, и открывает возможность для приложения этого метода в квантовании конкретных теоретико-полевых моделей.

Как известно, конструкция Федосова [19], [21] и различные её обобщения [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29] не позволяют квантовать нерегулярные скобки Пуассона, то есть скобки с пуассоновым тензором непостоянного ранга, и основным препятствием к квантованию таких скобок является отсутствие аффинной связности, согласованной с нерегулярной пуассоновой структурой. В то же время, вопрос о квантовании нерегулярных пуассоновых структур, кажущийся на первый взгляд экзотическим, в действительности возникает в теории поля при изучении симметрий квантового уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) [30]. Дело в том, что группа симметрий классического уравнения КдФ оказывается наделённой нерегулярной пуассоновой структурой, и, следовательно, симметрии квантового уравнения КдФ должны образовывать бесконечно-мерную квантовую группу, которая получается квантованием данной пуассоновой структуры.

Следует отметить, что метод Федосова может рассматриваться как непосредственное обобщение вейлевского квантования линейного симплектического пространства, в то время как для физических приложений необходимо использовать обобщение данного метода на случай виковского символа, который оказывается более адекватным для последовательного квантования теоретико-полевых моделей.

Целью данной диссертации является развитие приложений методов классической и квантовой редукции к интегрируемым системам и квантовым алгебрам. Диссертация состоит из двух частей. Первая часть посвящена приложению процедуры гамильтоновой редукции к интегрируемым системам. В этой части мы предлагаем метод вычисления классических r-матриц интегрируемых систем, основанный на использовании гамильтоновой редукции, и иллюстрируем предложенный метод на примере эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином. В первой части мы также приводим пример интегрируемой системы, полученной в рамках гамильтоновой редукции по действию нелиевых симметрий. Мы показываем, что, несмотря на более сложную природу калибровочных преобразований, используемых в данной конструкции, уравнения движения этой системы решаются методом проектирования.

Во второй части предложены две конструкции, обобщающие метод Федосова. Первая конструкция позволяет дать ковариантное определение виковского символа для наиболее общего симплектического многообразия. Мы описываем геометрию многообразий, допускающих конструкцию виковского символа, а также приводим критерий эквивалентности виковского и вейлевского звёздочка-произведений. Второе обобщение метода Федосова, предложенное в этой части, позволяет построить универсальное деформационное квантование для некоторого класса нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с постоянными решениями классического уравнения Янга-Бакстера. Мы показываем, что предложенная нами процедура позволяет проквантовать произвольную треугольную биалгебру Ли в смысле теории квантовых групп.

Важным инструментом для изучения интегрируемых систем является классическая r-матрица [31], [32], [33]. Она кодирует гамильтонову структуру уравнения Лакса, обеспечивает инволюцию интегралов движения и является необходимым ингредиентом для квантования интегрируемых систем [34].

В данной диссертации предложен метод вычисления классических r-матриц для интегрируемых систем, полученных методом гамильтоновой редукции. Мы применяем этот метод к вычислению классической r-матрицы эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином [35], [36], [37], используя её описание в терминах конструкции систем Хитчина [38].

Разработка этого метода мотивирована статьями [39], [40], в которых авторы вычисляют классические r-матрицы для цепочки Тоды, для тригонометрической и эллиптической системы Калоджеро-Мозера, используя калибровочно инвариантное продолжение матриц Лакса.

В первой работе [39] рассматривается гамильтонова редукция на кокасательном расслоении над конечномерной группой Ли, а во второй работе данная конструкция обобщается на случай центрально-расширенных петлевых групп.

В этом контексте следует также упомянуть статью [41], в которой рассматривается специальный случай пуассоновой редукции на группоидах Пуассона-Ли с целью получения новых примеров динамических r-матриц Варченко-Этингофа [42].

В данной диссертации мы описываем наиболее общую схему гамильтоновой редукции, позволяющую получать классическую r-матрицу для редуцированной системы. Ограничения, связанные с предложенной нами вычислительной процедурой, состоят в том, что калибровочные симметрии должны реализовываться в виде присоединённого действия некоторой алгебры Ли, на компоненте расширенного фазового пространства, которая в результате редукции даёт матрицу Лакса интегрируемой системы, и часть пуассоновой структуры расширенного фазового пространства, связанная с данной компонентой должна иметь r-матричный вид.

Мы ожидаем, что предложенный нами метод вычисления классических r-матриц позволит найти r-матричную структуру для других интегрируемых систем типа систем Хитчина [38].

Как известно, гамильтонова редукция находит широкое применение в построении интегрируемых систем [7], [8], [35], [43], однако в большинстве случаев интегрируемые системы строятся при помощи гамильтоновой редукции, осуществляемой по действию какой-либо алгебры или группы Ли. В то же время, лиевы симметрии ни в какой мере не исчерпывают всех симметрий, и, в действительности, существует большое количество динамических систем, представляющих особый интерес в современной теоретической физике, чьи калибровочные симметрии не являются лиевыми [5] . По этой причине определённый интерес представляют примеры интегрируемых систем, полученных в рамках гамильтоновой редукции, осуществляемой по действию симметрий, чьё происхождение не связано с какой-либо алгеброй Ли.

В данной диссертации мы приводим пример интегрируемой системы, полученной путём гамильтоновой редукции по действию квадратичной алгебры Склянина [44], которая является нелиевой деформацией алгебры Ли $\mathfrak{u}_2$. Основная идея конструкции состоит использовании естественного обобщения понятия коприсоединённого действия на дуальном пространстве алгебры Ли на случай произвольного пуассонова многообразия.

Как известно, коприсоединённое действие алгебры Ли на её дуальном пространстве может быть записано в терминах линейной скобки Пуассона, естественным образом ассоциированной с данной алгеброй Ли. А именно, если p_μ – координаты в дуальном пространстве, а соответствующий пуассонов тензор имеет вид

$$\alpha_{\mu\nu}(p) = f^{\lambda}_{\mu\nu} p_\lambda,$$

где $f^{\lambda}_{\mu\nu}$ – структурные константы алгебры Ли. Тогда коприсоединённое действие записывается следующим образом

$$\delta_\epsilon p_\mu = \alpha_{\mu\nu}(p)\epsilon^\nu(p), \tag{1.1}$$

где ϵ^ν – инфинитезимальные параметры этого действия.

Если предположить теперь, что скобка Пуассона в формуле (1.1) уже не является линейной по координатам p_μ, то мы получим естественное обобщение коприсоединённого действия на случай произвольного пуассонова многообразия. Заметим, что впервые такое обобщение было предложено Карасёвым в его работе [45].

Орбиты действия (1.1) совпадают с симплектическими листами соответствующей скобки Пуассона, и в общем случае преобразования (1.1) не могут быть сведены к действию какой либо алгебры Ли, поскольку симплектические листы могут иметь сколь угодно сложную топологию, и в общем случае не могут являться орбитами какой-либо конечно-мерной алгебры Ли. Тем не менее, симметрию (1.1) можно всегда ассоциировать с действием некоторой бесконечно-мерной алгебры Ли, и в данном случае, эта алгебра Ли совпадает с алгеброй инфинитезимальных диффеоморфизмов, векторные поля которых касаются симплектических листов данной скобки Пуассона.

Коммутационные соотношения преобразований симметрии (1.1) естественным образом обобщают коммутационные соотношения алгебры Ли, а именно

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_\epsilon,$$

где

$$\begin{gathered} \epsilon = [\xi, \eta] = d\alpha(\xi, \eta) + \alpha(d\xi, \eta) + \alpha(\xi, d\eta), \\ \epsilon^\mu = \partial^\mu(\alpha_{\nu\lambda}\xi^\nu\eta^\lambda) + \alpha_{\nu\lambda}(\partial^\nu\xi^\mu - \partial^\mu\xi^\nu)\eta^\lambda + \alpha_{\nu\lambda}\xi^\nu(\partial^\lambda\eta^\mu - \partial^\mu\eta^\lambda), \\ \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial p_\mu}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Таким образом, мы получаем целый класс примеров многообразий, оснащённых нелиевыми симметриями.

Строгий математический подход к таким симметриям включает в себя понятие так называемого алгеброида Ли [46], [47]. Он определяется как расслоение $\mathcal{B}$ над многообразием M со скобкой Ли, заданной на сечениях этого расслоения $\Gamma(\mathcal{B})$ и с отображением якоря $\delta\ :\ \Gamma(\mathcal{B}) \mapsto \Gamma(TM)$, являющимся гомоморфизмом соответствующих алгебр Ли.

Используя эту терминологию, мы видим, что вышеприведённая конструкция является примером алгеброида Ли. А именно, расслоение этого алгеброида является кокасательным расслоением над пуассоновым многообразием, скобка Ли на сечениях ξ и η задаётся уравнением (1.2), а отображения якоря определено формулой (1.1)[1].

Заметим, что тождество Якоби, для скобки Ли (1.2) выполняется в силу соответствующего тождества Якоби для пуассонова тензора $\alpha_{\mu\nu}(p)$.

В построении нашего примера интегрируемой системы мы стартуем с многообразия $\mathbf{R}^4$, оснащённого классической скобкой Склянина [44] и, следовательно, оснащённого действием соответствующего алгеброида Ли, которое может рассматриваться как действие алгебры Склянина. Мы определяем расширенное фазовое пространство как кокасательное расслоение над $\mathbf{R}^4$ со стандартной сим-

[1] пример такого алгеброида, ассоциированного с пуассоновым многообразием был впервые приведён в статье [48].

плектической структурой, и поднимаем действие алгеброида с исходного многообразия $\mathbf{R}^4$ до канонического действия на кокасательном расслоении. Затем, мы находим гамильтоновы генераторы этого действия и строим интегрируемую систему, осуществляя симплектическую редукцию на поверхность ненулевого уровня этих генераторов и определяя гамильтонианы этой системы как редуцированные функций Казимира скобки Склянина.

Заметим, что в силу того, что скобка Склянина [44] является деформацией линейной скобки Пуассона, ассоциированной с алгеброй Ли $\mathfrak{u}_2$ предложенная конструкция аналогична гамильтоновой редукции, приводящей к рациональной системе Калоджеро-Мозера [7], [49]. В частности, гамильтонова редукция, связанная с одним из экспоненциальных вырождений скобки Склянина, приводит нас к системе, чья динамика эквивалентна динамике двух-частичной системы Калоджеро-Мозера.

Следует отметить, что представление Лакса для полученной нами системы неизвестно, поскольку эта система строилась при помощи гамильтоновой редукции по действию нелиевых симметрий. Несмотря на это, уравнения движения данной системы могут быть явно решены методом проектирования.

В качестве одного из приложений методов квантовой редукции, рассматриваемого в данной работе, мы предлагаем ковариантную процедуру построения звёздочки-произведения виковского типа в рамках федосовского деформационного квантования. Основным элементом предложенной конструкции является комплексно-значный симметричный тензор второго ранга, удовлетворяющий определённым алгебраическим и геометрическим условиям. Мы покажем, что симплектические многообразия, допускающие виковское деформационное квантование, оказываются с необходимостью наделёнными парой трансверсальных поляризаций, а используемый в данной конструкции симметричный тензор содержит в себе всю информацию об этих поляризациях. В диссертации доказан критерий идентификации симплектических многообразий, допускающих конструкцию виковского символа, а также сформулировано когомологическое условие эквивалентности виковского и вейлевского звёздочка-произведений.

Проблемы деформационного квантования, основы которого были сформулированы в работах Ф.А. Березина [50], а также в работах французских авторов [51] (см. также недавний обзор [52]), в настоящее время решены в самых разных аспектах. Вопрос существования формальной ассоциативной деформации коммутативной алгебры гладких функций на симплектическом многообразии или вопрос существования так называемого звёздочка-произведения был решён Де Уайлдом и Лекомтом [53]. В работах [54], [55], [56] было показано, что все такие звёздочка-произведения с точностью до эквивалентности классифицируются формальными рядами, принимающими значения во вторых когомологиях Де Рама. В работе Федосова [19] была предложена явная геометрическая конструкция для звёздочки-произведения на произвольном симплектическом многообразии, процедура квантования симплектоморфизмов этого многообразия, а также предложен способ построения следовой меры. Упомянутая выше классификация звёздочка-произведений на симплектическом многообразии получает наиболее простое объяснение в рамках метода Федосова. А именно, формальные ряды со значениями во вторых когомологиях Де Рама могут быть естественным образом отождествлены с модулями плоских связностей Федосова или с классами эквивалентности федосовских звёздочка-произведений. Непосредственное доказательство того факта, что любое звёздочка-произведение на симплектическом многообразии эквивалентно какому-либо федосовскому звёздочка-произведению, было предъявлено в работе Шу [57].

Более тонкий вопрос деформационного квантования скобок Пуассона с непостоянным рангом был решён Концевичем [58]. В данной работе была предложена явная формула для локального звёздочка-произведения, а также приведено доказательство возможности глобализовать деформационное квантование на произвольном пуассоновом многообразии.

Наряду с общей теорией деформационного квантования определённый интерес также представляло изучение специальных типов звёздочка-произведений, удовлетворяющих дополнительным алгебраическим или геометрическим свойствам. Так, например, конструкциями геометрического квантования и исчислением символов на кэлеровых многообразиях было мотивировано изучение деформационного квантования многообразий с парой трансверсальных поляризаций, которое может рассматриваться как естественное обобщение виковского или qp-символа. Начиная с пионерской работы Березина [59] по квантованию на комплексных симметрических пространствах, к настоящему времени накоплено большое количество литературы по деформационному квантованию на поляризованных многообразиях [22], [23], [60], [61], [62], [63], [64], [65]. При этом следует подчеркнуть, что во всех этих работах конструкции виковских звёздочка-произведений основаны на явном использовании специальных локальных координат (разделённых переменных в терминологии работы [61]), что не является вполне адекватным для физических приложений, поскольку большинство физических теорий сформулировано общекоординатным образом. По этой причине мы считаем необходимым связать пару поляризаций с дополнительной геометрической структурой (тензорным полем) на симплектическом многообразии таким образом, чтобы полученная конструкция звёздочка-произведения не подразумевала использование каких-либо специальных координат.

Изложим вкратце ключевую идею нашего подхода к построению бескоординатной формулировки виковского символа на искривлённом симплектическом многообразии. В дальнейшем, под термином виковский символ мы будем подразумевать широкий класс символов, включающих в себя, наряду с обычным (собственно) виковским символом, так называемый qp-символ, а также всевозможные их комбинации.

Проиллюстрируем это на примере линейного симплектического многообразия $\mathbf{R}^{2n}$, оснащённого канонической скобкой Пуассона $\{y^i, y^j\} = \omega^{ij}$. Как известно, пространство гладких функций на этом многообразии, оснащённое вейлевским звёздочка-произведением

$$a * b(y) = \exp\left(\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right) a(y)b(z)|_{z=y}, \tag{1.3}$$

является некоммутативной ассоциативной алгеброй с единицей. Эта алгебра называется алгеброй вейлевских символов.

Заметим, что координаты y входят в формулу (1.3) симметричным образом, или, другими словами, звёздочка-произведение (1.3) имеет инвариантный вид по отношению к произвольным линейным заменам координат. Конструкция виковского символа, напротив, всегда основана на какой-либо (вещественной, комплексной или смешанной) поляризации [66], которая разделяет координаты y на два набора (канонически) сопряжённых переменных. Так, например, конструкция qp-символа основана на разделении переменных фазового пространства на “координаты” q и “импульсы” p (это отвечает случаю двух трансверсальных вещественных поляризаций) и стандартного предписания “вначале q, а затем p” для всех полиномиальных функций. В случае комплексной поляризации в качестве таких “разделённых” переменных выступают осциляторные координаты $q \pm ip$.

Переход от вейлевского символа к виковскому формально осуществляется путём прибавления к тензору Пуассона ω^{ij} в формуле (1.3) определённого комплексно-значного симметричного тензора g^{ij}

$$a *_g b(y) = \exp\left(\frac{i\hbar}{2}\Lambda^{ij}\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right) a(y)b(z)|_{z=y}, \tag{1.4}$$
$$\Lambda^{ij} = \omega^{ij} + g^{ij}, \quad i,j = 1,2,...,2n.$$

Несмотря на то, что ассоциативность модифицированного звёздочка-произведения имеет место для любого постоянного тензора g , определение виковского символа дополняется ещё одним условием

$$rank\Lambda = corank\Lambda = n. \tag{1.5}$$

В частности, собственно виковский символ отвечает случаю чисто мнимого тензора g, в то время как вещественный тензор g задаёт qp-символ. В обоих случаях (включая случай смешанной поляризации) квадрат матрицы

$$I^i_j = \omega^{ik} g_{kj} \tag{1.6}$$

равен 1. Комплексифицированное фазовое пространство $\mathbf{C}^{2n}$ разлагается в прямую сумму подпространств поляризаций, и при этом оба эти подпространства оказываются собственными для оператора I с собственными значениями ± 1 .

Формула (1.4) может служить отправной точкой для ковариантного обобщения понятия виковского символа на случай произвольного симплектического многообразия. Переходя к искривлённому многообразию M, $\dim M = 2n$ с симплектической структурой $\omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, мы заменяем постоянную матрицу Λ на комплексно-значный контравариантный тензор второго ранга $\Lambda^{ij}(x) = \omega^{ij}(x) + g^{ij}(x)$, антисимметричная часть которого совпадает с соответствующим пуассоновым тензором $\omega^{ij}(x)$, $\omega^{ik}(x)\omega_{kj}(x) = \delta^i_j$, а матрица $||\Lambda^{ij}(x)||$ этого тензора в каждой точке многообразия удовлетворяет вышеупомянутому условию половинного ранга (1.5). Используя тензор $\Lambda^{ij}(x) = \omega^{ij}(x) + g^{ij}(x)$, мы наделяем любое касательное пространство $T_xM, \quad x \in M$, структурой симплектического линейного пространства с формой $\omega(x)$ и определяем на нём виковское звёздочка-произведение по формуле (1.4). Рассматривая объединение всех касательных пространств с заданными на них звёздочка-произведениями, мы получаем расслоение виковских алгебр, являющееся примером так называемого квантового касательного расслоения [57]. Затем, следуя методу Федосова, мы вводим плоскую связность в данном расслоении, добавляя квантовые поправки к исходной аффинной связности, согласованной с $\Lambda(x)$, то есть такой, что $\nabla_i \Lambda^{jk} = 0$. Мы показываем, что плоские сечения данной связности естественным образом идентифицируются с квантовыми наблюдаемыми $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Таким образом, на пространстве $C^\infty(M)[[\hbar]]$ индуцируется структура ассоциативной алгебры, а соответствующее произведение квантовых наблюдаемых удовлетворяет всем требуемым свойствам звёздочка-произведения. Единственным ключевым моментом всей этой программы является существование симметричной линейной связности ∇, согласованной с Λ. Ниже мы покажем, что необходимым и достаточным условием существования такой связности является инволютивность правого и левого ядерных распределений Λ. В том случае, когда данное условие выполнено ∇ оказывается связностью Леви-Чивита, соответствующей невырожденному симметричному тензору $g^{ij}(x)$, а правое и левое ядерные распределения задают пару трансверсальных поляризаций на симплектическом многообразии (M, ω). Пару (M, Λ), удовлетворяющую этим условиям, мы будем называть многообразием Федосова виковского типа или просто ФВ-многообразием по аналогии с тем как симплектическое многообразие, оснащённое симметричной связностью, согласованной с симплектической структурой, принято называть многообразием Федосова [67].

Мы ожидаем, что предложенная нами конструкция виковского символа на искривлённых многообразиях может найти своё применение в построении и квантовании нелинейных полевых теории.

Вторым приложением квантовой редукции, предложенным в данной диссертации, является специальное обобщение конструкции Федосова, позволяющее проквантовать определённый класс нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с постоянными решениями классического уравнения Янга-Бакстера. И хотя рассмотренный класс скобок Пуассона включает в себя нерегулярные скобки и уже поэтому представляет собой отдельный интерес, наша конструкция допускает еще и чисто алгебраическое приложение в теории квантовых групп, а именно позволяет проквантовать произвольную треугольную биалгебру Ли.

Для того чтобы описать класс рассматриваемых нами нерегулярных скобок мы приведём простой пример [68], [69] скобки Пуассона такого типа.

Рассмотрим набор попарно коммутирующих векторных полей X_i, $i = 1, ..., n$, заданных на гладком многообразии $\mathcal{M}$. Задание этих полей можно понимать как задание действия коммутативной алгебры на пространстве гладких функций $C^\infty(\mathcal{M})$.

Постоянная антисимметричная матрица r естественным образом определяет на $\mathcal{M}$ следующую скобку Пуассона

$$\{f, g\} = r^{ij}(X_i f)(X_j g)\,, \qquad \forall\, f, g \in C^\infty(\mathcal{M})\,. \tag{1.7}$$

В общем случае, данная скобка Пуассона нерегулярна, поскольку ранг системы векторов X_i может меняться от точки к точке. Тем не менее, скобка (1.7) может быть проквантована при помощи простого аналога формулы Вейля-Мойяла

$$f * g = f \cdot g + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{1}{k!} r^{i_1 j_1} \ldots r^{i_k j_k} (X_{i_1} \ldots X_{i_k} f)(X_{j_1} \ldots X_{j_k} g)\,, \tag{1.8}$$

где $\hbar$ как и ранее обозначает формальный параметр деформации.

Ассоциативность звёздочка-произведения (1.8) тривиально следует из коммутативности векторных полей X_i.

Естественное обобщение приведённого примера состоит в том, что бы допустить некоммутирующие векторные поля X_i, а именно рассмотреть случай, когда векторные поля образуют некоммутативную алгебру Ли

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k\,, \tag{1.9}$$

где f_{ij}^k – структурные константы.

Тождество Якоби для скобки Пуассона (1.7) влечёт, что

$$\{f, \{g, h\}\} + \text{циклические перестановки по } (f, g, h) = \Lambda^{ijk}(X_i f)(X_j g)(X_k h) = 0\,, \tag{1.10}$$

где

$$\Lambda^{ijk} = f_{mn}^i r^{mj} r^{nk} + \text{циклические перестановки по } (i, j, k)\,. \tag{1.11}$$

Для коммутирующих векторных полей X_i мы имели $\Lambda \equiv 0$, и тождество Якоби тривиально выполнялось. В общем же случае уравнение $\Lambda = 0$ нетривиально и известно в математической литературе как классическое уравнение Янга-Бакстера

$$f_{mn}^i r^{mj} r^{nk} + \text{циклические перестановки по } (i, j, k) = 0\,. \tag{1.12}$$

Антисимметричная матрица r, удовлетворяющая уравнению (1.12) называется классической треугольной r-матрицей [70].

Если векторные поля X_i линейно независимы (по крайней мере в одной точке на $\mathcal{M}$), уравнение Янга-Бакстера (1.12) является одновременно необходимым и достаточным условием для выполнения тождества Якоби. В противном случае уравнение $\Lambda = 0$ даёт лишь достаточное условие для выполнения этого тождества.

Важное наблюдение состоит в том, что треугольную r-матрицу можно всегда без ограничения общности считать невырожденной. Действительно, как и для любой антисимметричной матрицы r мы всегда можем найти такой базис генераторов $X_i = (X_A, X_\alpha)$ в котором $r^{i\alpha} = 0$, а $\det(r^{AB}) \neq 0$. Следовательно, в действительности, в определение скобки Пуассона (1.7) входят лишь векторные поля X_A. Из классического уравнения Янга-Бакстера (1.12) следует, что

$$\Lambda^{\alpha AB} = f^\alpha_{MN} r^{MA} r^{NB} = 0 \quad \Rightarrow \quad f^\alpha_{MN} = 0,$$

и значит векторные поля X_A образуют подалгебру Ли, для которой r^{AB} является невырожденной треугольной r-матрицей.

Легко видеть, что для невырожденной r-матрицы классическое уравнение Янга-Бакстера (1.12) сводится к простому условию коцикла

$$f^n_{ij} r_{nk} + \text{циклические перестановки по } (i,j,k) = 0\,. \tag{1.13}$$

где $r_{ik} r^{kj} = \delta^j_i$.

Как известно решения уравнения (1.13), образующие линейное пространство 2-коциклов алгебры Ли $\mathcal{G}$, находятся во взаимнооднозначном соответствии с центральными расширениями алгебры $\mathcal{G}$. Другими словами, уравнение (1.13) является необходимым условием для выполнения тождества Якоби следующей скобки Ли

$$[y_i, y_j] = f^k_{ij} y_k + r_{ij} c\,, \qquad [c, y_i] = 0\,. \tag{1.14}$$

Отметим, что алгебра Ли $\mathcal{G}$, допускающая центральное расширение, заданное невырожденной матрицей $c = ||r_{ij}||$ называется квази-фробениусовой, и, в свою очередь, квази-фробениусова алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется фробениусовой, если хотя бы одно такое центральное расширение тривиально. [2]. Многочисленные примеры (квази-)фробениусовых алгебр Ли приведены в работах [72].

В данной диссертации предлагается простая процедура квантования скобки Пуассона (1.7), ассоциированной с действием квази-фробениусовой алгебры Ли (1.9). Основное отличие предложенного нами метода от конструкции Федосова состоит в использовании вспомогательного квантового расслоения, ассоциированного с универсальной обёртывающей некоторой алгебры Ли вместо обычной алгебры Вейля, которая используется в исходной конструкции Федосова.

Отметим, что несмотря на то, что ковариантное квантование произвольного пуассонова многообразия было недавно предложено в работе [73], эта общая схема оказывается слишком громоздкой для рассматриваемого нами простого примера, и потому, в силу своей простоты, предложенный нами метод представляет гораздо больший практический интерес, чем конструкция, предложенная в работе [73].

Процедура квантовая r-скобок, предложенная в данной диссертации, допускает интересное приложение в теории квантовых групп [74], а именно позволяет проквантовать произвольную треугольную биалгебру Ли. Такая возможность появляется в связи со специальным свойством тех звёздочка-произведений, которые получаются в рамках нашей процедуры. Это свойство состоит в том что формула для звёздочка-произведения является универсальной, то есть допускает подстановку любых векторных полей X_i, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (1.9). Последнее означает, что такое звёздочка-произведение определяет некоторый элемент $F \in \mathcal{U}(\mathcal{G})\otimes\mathcal{U}(\mathcal{G})[[\hbar]]$, где $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ обозначает универсальную обёртывающую для алгебры Ли $\mathcal{G}$. Условие ассоциативности и условие квазиклассического предела для полученного звёздочка-произведения означают, что данный элемент F оказывается так называемым универсальным твистующим элементом, соответствующим классической r-матрице r, и определяет твистующее преобразование, переводящее исходную универсальную обёртывающую $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ в квантовую универсальную обёртывающую $\mathcal{U}_\hbar(\mathcal{G})$ для треугольной биалгебры Ли, соответствующей данной r-матрице r.

Впервые процедура универсального квантования треугольных r-матриц была предложена в работе Дринфельда [70]. Однако, в действительности, вычисле-

[2]Понятие фробениусовой алгебры Ли впервые встречается в работах [71], где автор показал, что алгебра Ли является фробениусовой тогда и только тогда, когда её универсальная обёртывающая алгебра примитивна, то есть обладает простым точным модулем

ния, которые необходимы для построения твистующего элемента с помощью метода Дринфельда, оказываются слишком громоздкими, и именно поэтому большинство примеров деформаций треугольных биалгебр строится путём техники последовательных твистующих преобразований, а не с помощью непосредственной процедуры квантования [72], [75].

В недавней работе [76], метод Федосова использовался для квантования специального класса треугольных динамических r-матриц. Помимо этого, приложения квантования Федосова к некоторому классу нерегулярных скобок Пуассона, включающих в себя r-скобки (1.7), (1.9) на формальном алгебраическом языке обсуждались в работе [77]. И хотя, в принципе, метод, предложенный в работе [76] как и в предшествующей работе [70], позволяет найти универсальное квантование для r-скобки (1.7), и даже для более общих пуассоновых структур, на техническом уровне он оказывается неоправдано громоздким в приложении в такому простому классу скобок Пуассона. В связи с этим, предложенный нами простой подход может оказаться полезным как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Диссертация состоит из пяти глав и заключения. Первая глава – Введение. Вторая и третья, а также четвёртая и пятая главы собраны в отдельные части. В первой части рассматриваются приложения метода гамильтоновой редукции к классическим интегрируемым системам, а во второй обобщения метода Федосова и их приложения к построению виковского символа на искривлённом симплектическом многообразии и универсальному квантованию некоторого класса нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с постоянными решениями классического уравнения Янга-Бакстера.

Вторая глава посвящена методу вычисления классических r-матриц для интегрируемых систем, полученных в рамках гамильтоновой редукции и применению этого метода к вычислению классической r-матрицы эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином.

В третьей главе рассматривается пример интегрируемой системы, полученной методом гамильтоновой редукции по действию нелиевых симметрий. Мы показываем, что, несмотря на более сложную природу калибровочных симметрий, используемых в конструкции, уравнения движения данной системы решаются методом проектирования.

В четвёртой главе мы обобщаем метод квантовой редукции Федосова с целью построения общекоординатной формулировки виковского символа на искривлённом симплектическом многообразии. Мы описываем геометрию многообразий, допускающих конструкцию виковского символа и рассматриваем вопрос эквивалентности виковского и вейлевского звёздочка-произведений.

Пятая глава диссертации посвящена ещё одному обобщению метода Федосова, позволяющему проквантовать некоторый класс нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с классическими треугольными r-матрицами. В этой главе мы показываем, что данное квантование является универсальным, и, следовательно, предложенная процедура позволяет проквантовать произвольную треугольную биалгебру Ли в смысле теории квантовых групп.

В заключении перечислены основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Часть I

Гамильтонова редукция в приложении к интегрируемым системам.

Глава 2

Получение классической r-матрицы методом гамильтоновой редукции.

В этой главе мы предлагаем метод вычисления классических r-матриц для интегрируемых систем, полученных в рамках гамильтоновой редукции. Ограничения, накладываемые вычислительной процедурой, по-существу состоят в лиевости соответствующих калибровочных преобразований. Мы применяем наш метод к вычислению классической r-матрицы эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином, используя её описание в терминах конструкции систем Хитчина [38].

Всюду в данной главе мы используем стандартные обозначения для скобок Пуассона между элементами матрицы Лакса. Например, если

$$r = \sum_{i,j,k,l} r_{ijkl} e_{ij} \otimes e_{kl}, \tag{2.1}$$

где

$$(e_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$$

стандартный базис в gl_N, то формула

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{2.2}$$

обозначает, что скобки Пуассона между матричными элементами L_{ij} и L_{kl} имеют вид

$$\{L_{ij}, L_{kl}\} = \sum_m (r_{imkl} L_{mj} - L_{im} r_{mjkl} - r_{kmij} L_{ml} + L_{km} r_{mlij})\,. \qquad (2.3)$$

2.1 Метод получения формальной r-матрицы.

В данном разделе мы покажем, что классическая интегрируемая система, полученная методом гамильтоновой редукции, допускает каноническую r-матрицу. Слово "формальная", стоящее в заголовке, означает, что для большинства примеров интегрируемых систем соответствующая гамильтонова редукция осуществляется в контексте теории поля, следовательно, формула для r-матрицы содержит бесконечные суммы и должна доопределяться отдельно для каждой конкретной системы.

Изложения нашего метода мы начнём с описания ограничений, накладываемых вычислительной процедурой. Эти ограничения состоят в наличии следующих трёх предположений, из которых мы исходим при выводе классической r-матрицы:

1. Элемент Φ, который после редукции даёт матрицу Лакса, является элементом некоторой (возможно бесконечно-мерной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2. Скобки Пуассона расширенного фазового пространства между "матричными элементами" Φ имеют r-матричный вид.

3. Калибровочные преобразования Φ представляются в виде

$$\Phi \mapsto h^{-1} \Phi h, \qquad (2.4)$$

   где h является элементом группы Ли G, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Условия 1 и 3 продиктованы нашим намерением рассматривать гамильтонову редукцию, приводящую к интегрируемой системе вместе с её представлением Лакса. С этой точки зрения условие 2 является дополнительным. Оно означает, что существует некоторая классическая r-матрица r^0, определяющая часть пуассоновой структуры расширенного фазового пространства, связанную с элементом Φ, а именно, скобки Пуассона между "матричными элементами" Φ задаются следующей формулой

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = [r^0_{12}, \Phi_1] - [r^0_{21}, \Phi_2]. \tag{2.5}$$

Ниже мы увидим, как посредством гамильтоновой редукции исходная r-матрица r^0 переходит в искомую r-матрицу интегрируемой системы.

Инфинитезимальный вариант условия 3 состоит в том, что скобки Пуассона между связями первого рода T_a и элементом Φ переписываются в виде коммутатора

$$\{T_a, \Phi\} = [e_a, \Phi], \tag{2.6}$$

где $\{e_a\}$ – базис алгебры Ли калибровочных преобразований.

Вместе с некоторыми калибровочными условиями χ^a связи первого рода образуют систему связей второго рода $\sigma_\alpha = 0$ [5]. Используя эти связи, мы можем определить скобку Дирака, позволяющую вычислять редуцированную скобку Пуассона в терминах расширенного фазового пространства по следующему правилу. Для того чтобы вычислить скобку Пуассона между наблюдаемыми a и b редуцированного фазового пространства, мы должны вычислить скобку Дирака между любыми продолжениями A и B функций a, b с поверхности связей второго рода в расширенное фазовое пространство

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\} - \{A, \sigma_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\sigma_\beta, B\}. \tag{2.7}$$

После чего, скобка Пуассона между функциями a и b оказывается равна выражению (2.7), вычисленному на поверхности связей $\sigma_\alpha = 0$.

В уравнении (2.7) $||C^{\alpha\beta}||$ является матрицей, обратной к матрице $||C_{\alpha\beta}|| = \{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\}$, где $\{\ ,\ \}$ обозначают скобку Пуассона расширенного фазового пространства.

Поскольку после гамильтоновой редукции элемент $\Phi \in \mathfrak{g}$ переходит в матрицу Лакса, пуассонова структура лаксовых уравнений определяется скобкой Дирака, вычисленной на поверхности связей $\sigma_\alpha = 0$, между "матричными элементами" Φ.

Замечательным обстоятельством является то, что при выполнении вышеупомянутых условий выражение для этой скобки Дирака автоматически принимает r-матричный вид. Действительно, благодаря условию 2, первый член скобки Дирака (2.7) уже имеет требуемый вид (2.5), в то время как оставшиеся члены в

(2.7), вычисленные на поверхности связей $\sigma_\alpha = 0$, принимают r-матричный вид в силу условия 3. Поясним последнее более подробно.

Единственные ненулевые элементы матрицы $||C^{\alpha\beta}||$, вычисленной на поверхности связей σ_α, имеют вид

$$C^{\chi^a\, T_b} = -C^{T_b\, \chi^a} = (P^{-1})^b_a, \tag{2.8}$$

и

$$C^{T_a\, T_b} = (P^{-1})^a_c \{\chi^c, \chi^d\} (P^{-1})^b_d, \tag{2.9}$$

где

$$P^b_a = \{T_a, \chi^b\}.$$

Таким образом, в каждом из дополнительных членов в выражении $\{\Phi_1, \Phi_2\}_{DB}|_{\sigma_\alpha=0}$ по крайней мере одна из скобок Пуассона Φ со связями переписывается в виде коммутатора, благодаря уравнению (2.6), и, следовательно, каждый член принимает r-матричный вид.

В результате, мы получаем искомую классическую r-матрицу

$$r = (r^0 - (P^{-1})^a_b e_a \otimes \{\chi^b, \Phi\} + \frac{1}{2} Q^{ab} e_a \otimes \{T_b, \Phi\})|_{\sigma_\alpha=0}, \tag{2.10}$$

где

$$Q^{ab} = (P^{-1})^a_c \{\chi^c, \chi^d\} (P^{-1})^b_d$$

В следующем разделе мы применим формулу (2.10) к вычислению классической r-матрицы эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином.

2.2 Классическая R-матрица эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином.

В этом разделе мы покажем, что классическая r-матрица эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином может быть вычислена в рамках гамильтоновой редукции. Примечательным является то, что при вычислении данной r-матричной структуры мы не используем тождества на эллиптические функции, из которых следует интегрируемость систем подобного типа.

В процессе вычисления мы разбиваем процедуру гамильтоновой редукции на два этапа. На первом этапе мы опускаем калибровочные преобразования, связанные с параболической подгруппой и получаем формулу для классической r-матрицы системы Калоджеро-Мозера с максимальным спиновым сектором.

Второй этап гамильтоновой редукции осуществляется по остаточному действию параболической подгруппы уже на конечномерном пространстве. По этой причине предложенный нами рецепт (2.10) годится для любой параболической подгруппы $SL_N(\mathbf{C})$ и любого условия фиксации остаточной калибровочной симметрии.

Гамильтонова редукция для эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином была впервые предложена в работе [35], в которой фазовое пространство данной системы реализовано как кокасательное расслоение над пространством модулей топологически тривиальных голоморфных расслоений над тором с отмеченной точкой. Мы используем эту конструкцию при выводе классической r-матрицы.

Для наших целей оказывается более удобным использовать другую формулировку [36] этой конструкции, основанную на чеховском описании пространства модулей голоморфных расслоений. Мы реализуем тор Σ_τ как фактор многообразие $\mathbf{C}/q\mathbf{Z}$ с $q = e^{2\pi i\tau}$, $Im\tau > 0$ и в качестве фундаментальной области выбираем кольцо $Ann_\tau = \{|q^{1/2}| < |z| < |q^{-1/2}|\}$.

Мы определяем голоморфное векторное расслоение E_N ранга N над Σ_τ матричной функцией перехода $g(z) \in GL_N(\mathbf{C})$, которая голоморфна в окрестности контура $\gamma = \{|z| = |q^{1/2}|\}$. Пространство полей $g(z)$ мы будем обозначать буквой $\mathcal{L}$.

Пусть далее $\mathcal{G}$ – группа $GL_N(\mathbf{C})$-значных голоморфных функций $f(z)$ на кольце Ann_τ таких что

$$f(z)\Big|_{z=1} = I, \tag{2.11}$$

где I – единичная матрица. Группа $\mathcal{G}$ действует на пространстве $\mathcal{L}$ следующим образом

$$g(z) \mapsto f(z)g(z)f^{-1}(q^{-1}z)\,. \tag{2.12}$$

Заметим, что алгебра Ли Lie($\mathcal{G}$) состоит из матрично-значных голоморфных функций $\varepsilon(z)\ :\ Ann_\tau \mapsto gl_N(\mathbf{C})$ обращающихся в нуль в точке $z = 1$

$$\varepsilon(z)\Big|_{z=1} = 0.$$

Фактор-пространство относительно действия (2.12) группы $\mathcal{G}$

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}/\mathcal{G} \tag{2.13}$$

является пространством модулей голоморфных расслоений на торе Σ_τ с отмеченной точкой $z = 1$. Дальнейшая редукция пространства модулей (2.13) по действию параболической подгруппы $\mathcal{P} \subset SL_N(\mathbf{C})$ приводит нас к пространству модулей голоморфных расслоений на Σ_τ с квази-параболической структурой в точке $z = 1$.

Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{L}$ является расширенным фазовым пространством нашей интегрируемой системы. Роль двойственной координаты к $g(z)$ играет так называемое поле Хиггса, которое представляет собой $gl_N(\mathbf{C})$-значную 1-форму

$$\eta = \eta(z)\frac{dz}{z}\,,$$

где $\eta(z)$ – голоморфное поле в окрестности контура γ_1.

Каноническая симплектическая форма на $T^*\mathcal{L}$ имеет следующий вид

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \mathrm{tr}\delta(g^{-1}(z)\eta) \wedge \delta g(z)\,. \tag{2.14}$$

Действие (2.12) поднимается до гамильтонова действия на пространстве $T^*\mathcal{L}$

$$\eta(z) \mapsto f(z)\eta(z)f^{-1}(z)\,. \tag{2.15}$$

Соответствующее отображение моментов имеет вид

$$\mu \;:\; T^*\mathcal{L} \mapsto Lie^*(\mathcal{G})\,, \tag{2.16}$$

где

$$\mu[\eta, g](\varepsilon) = \oint_{\gamma_1} \mathrm{tr}(g^{-1}(z)\,\eta\,g(z)\,\varepsilon(q^{-1}z) - \eta\,\varepsilon(z)), \qquad \varepsilon \in Lie(\mathcal{G}). \tag{2.17}$$

Равенство нулю отображения моментов (2.17) эквивалентно условию, что функция $\eta(z)$ может быть мероморфно продолжена внутрь кольца так, что для $|z| = |q^{1/2}|$

$$\eta(q^{-1}z) = g^{-1}(z)\eta(z)g(z), \tag{2.18}$$

и во всем кольце функция $\eta(z)$ имеет единственный простой полюс первого порядка в точке $z = 1$.

Как известно, топологически тривиальное расслоение общего положения на торе является прямой суммой линейных расслоений [78]. Следовательно голоморфное расслоение общего положения с отмеченной точкой может быть сопряжено к прямой сумме линейных расслоений при помощи постоянной матрицы $\alpha \in SL_N(\mathbf{C})$.

Другими словами, используя действие группы $\mathcal{G}$ (2.12), поле $g(z)$ общего положения может быть приведено к постоянной матрице следующего вида

$$h = \alpha \begin{pmatrix} e^{-2\pi i u_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i u_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-2\pi i u_N} \end{pmatrix} \alpha^{-1}\,. \tag{2.19}$$

В частности, это означает, что

$$\partial_z g_{ii}(z) = 0 \tag{2.20}$$

может быть выбрано в качестве условия фиксации калибровки.

Легко видеть, что элементы матрицы α определяются h с точностью до следующего масштабного преобразования

$$\alpha_{ij} \mapsto \alpha_{ij}\lambda_j, \qquad \lambda_j \neq 0, \tag{2.21}$$

а u_i и $u_i' = u_i + n_1 + n_2\tau$, $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ задают одно и тоже голоморфное расслоение на Σ_τ.

Таким образом, открытое всюду плотное подмножество пространства модулей $\mathcal{M}$ (2.13) может быть параметризовано точками множества

$$(J \times \mathbf{CP}^{N-1})^N, \tag{2.22}$$

где J – Якобиан кривой Σ_τ.

Данная параметризация является частным случаем параметризации Тюрина [79] голоморфных расслоений на произвольных римановых поверхностях.[1]

Разложим функции $g(z)$ и $\eta(z)$ в ряды Лорана в окрестности контура γ

$$\eta_{ij}(z) = \sum_{a\in\mathbf{Z}} \eta_{ij}^a z^a\,, \qquad g_{ij}(z) = \sum_{a\in\mathbf{Z}} g_{ij}^a z^a\,. \tag{2.23}$$

[1]В этой связи следует упомянуть работы [80], [81], в которых параметризация Тюрина используется для описания систем Хитчина ассоциированных с римановыми поверхностями произвольного рода.

Соответствующие скобки Пуассона между лорановскими коэффициентами находятся в виде

$$\{\eta^a_{ij},\eta^b_{kl}\} = -\eta^{a+b}_{il}\delta_{kj} + \eta^{a+b}_{kj}\delta_{il}, \qquad \{g^a_{ij},\eta^b_{kl}\} = g^{a+b}_{kj}\delta_{il}, \qquad \{g^a_{ij},g^b_{kl}\} = 0. \tag{2.24}$$

В этих терминах коэффициенты разложения связей $\mu[\eta, g] = 0$ (2.17) принимают вид

$$M^a_{ij} = \sum_{b,c,k,l}(g^{-1})^{b-c}_{ik}\eta^c_{kl}g^{a-b}_{lj}q^a - \sum_{b,c,k,l}(g^{-1})^{b-c}_{ik}\eta^c_{kl}g^{-b}_{lj} - \eta^a_{ij} + \eta^0_{ij}\,, \qquad a \neq 0, \tag{2.25}$$

а калибровочные условия (2.20) переписываются следующим образом

$$g^a_{ij} = 0, \qquad a \neq 0. \tag{2.26}$$

В результате мы получаем систему связей второго рода

$$M^a_{ij} = 0 \ (a \neq 0), \quad g^a_{ij} = 0 \ (a \neq 0). \tag{2.27}$$

Ограничение поля $g(z)$ на поверхность связей (2.27) оказывается постоянной матрицей $g(z) = h$ (2.19), в то время как поле ограничение поля η даёт матрицу Лакса эллиптической системы Калоджеро-Мозера с максимальным спиновым сектором

$$\eta(z) = l(z) = \alpha\,\tilde{l}(z)\,\alpha^{-1}\,, \tag{2.28}$$

где

$$\tilde{l}_{ii}(z) = -\frac{v_i}{2\pi i}, \qquad \tilde{l}_{ij}(z) = -\sum_{k=1}^{N}\beta_{ik}\alpha_{kj}\,\phi(z,u_{ij}),\ i \neq j\,, \qquad u_{ij} = u_i - u_j\,.$$

Переменные u_i, α_{ij}, v_j и β_{ij} параметризуют редуцированное фазовое пространство $T^*\mathcal{M} \approx T^*(J \times \mathbf{CP}^{N-1})^N$.

Поскольку для каждого фиксированного $j = 1, \ldots, N$ α_{ij} являются однородными координатами на соответствующем проективном пространстве $\mathbf{CP}^{N-1}$, редуцированное пространство $T^*\mathcal{M}$ понимается как результат конечно-мерной симплектической редукции по связям первого рода

$$\sum_{k=1}^{N}\beta_{ik}\alpha_{ki} = 0\,. \tag{2.29}$$

в кокасательном расслоении

$$T^*(J \times \mathbf{C}^N)^N \tag{2.30}$$

с канонической симплектической формой

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{N} dv_i \wedge du_i + \sum_{i,j=1}^{N} d\beta_{ij} \wedge d\alpha_{ji}\,. \tag{2.31}$$

Наконец, функция $\phi(z,u)$ в уравнении (2.28) может быть представлена в виде

$$\phi(z,u) = \sum_{a\in\mathbf{Z}} \frac{z^a}{q^a e^{2\pi i u} - 1}, \quad |q| < |z| < 1\,, \quad u \neq a + b\tau,\ a,b \in \mathbf{Z}. \tag{2.32}$$

Матрица Лакса системы Хитчина с квази-параболической структурой в отмеченной точке $z = 1$ получается редукцией матрицы (2.28) по присоединённому действию соответствующей параболической подгруппы $\mathcal{P} \subset SL_N(\mathbf{C})$.

Для вычисления r-матрицы для (2.28) нам необходимо найти скобку Дирака, осуществляющую редукцию на поверхность связей (2.27). Для этого достаточно знать выражения для скобок Пуассона связей (2.27), вычисленные на поверхности этих же связей. Несложные вычисления дают следующие выражения для ненулевых скобок, вычисленных на поверхности (2.27).

$$\{g_{ij}^a\,, M_{kl}^b\} = \delta_{a+b,0}\,(q^{-a} h_{il}\delta_{kj} - h_{kj}\delta_{il}). \tag{2.33}$$

Для элементов соответствующей обратной матрицы мы используем следующие обозначения. Например, $(C^{Mg})_{a\ b}^{ij\ kl}$ является матричным элементом с первым индексом M_a^{ij} и вторым индексом g_b^{kl}. Тогда ненулевые элементы обратной матрицы записываются в виде

$$(C^{Mg})_{a\ b}^{ij\ kl} = -(C^{gM})_{b\ a}^{kl\ ij} = \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\delta_{a+b,0}\,\alpha_{lm}(\alpha^{-1})_{mi}\alpha_{jn}(\alpha^{-1})_{nk}}{q^a\,e^{-2\pi i u_n} - e^{-2\pi i u_m}}\,. \tag{2.34}$$

В процессе вычисления r-матрицы мы будем использовать следующее свойство

$$\{M_{ij}^a, \eta^b\} = [e_{ji}, \eta^{a+b}] - [e_{ji}, \eta^b], \tag{2.35}$$

которое является непосредственным аналогом общего условия (2.6).

Запишем выражение для скобки Дирака (2.7) между коэффициентами разложения поля $\eta(z)$ в виде

$$\{\eta_1^a, \eta_2^b\}_{DB} = \{\eta_1^a, \eta_2^b\} + D^{ab}\,.$$

Первая часть этого выражения, то есть исходная скобка расширенного фазового пространства, может быть переписана в r-матричной форме

$$\{\eta_1^a, \eta_2^b\} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}[e_{ij}\otimes e_{ji}, \eta_1^{a+b}] - \frac{1}{2}\sum_{i,j}[e_{ij}\otimes e_{ji}, \eta_2^{a+b}]. \tag{2.36}$$

Вторая часть D^{ab}, вычисленная на поверхности связей имеет вид

$$D^{ab} = \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\alpha_{im}(\alpha^{-1})_{ml}\alpha_{kn}(\alpha^{-1})_{nj}}{q^b\, e^{-2\pi i u_{mn}} - 1}([e_{ij}\otimes e_{kl}, \eta_1^{a+b}] - [e_{ij}\otimes e_{kl}, \eta_1^a])$$

$$- \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\alpha_{im}(\alpha^{-1})_{ml}\alpha_{kn}(\alpha^{-1})_{nj}}{q^a\, e^{-2\pi i u_{mn}} - 1}([e_{kl}\otimes e_{ij}, \eta_2^{b+a}] - [e_{kl}\otimes e_{ij}, \eta_2^b])\,, \tag{2.37}$$

где $u_{mn} = u_m - u_n$.

Для того чтобы найти скобку Дирака между полями $\eta(z)$ и $\eta(z')$, мы должны вычислить сумму следующего бесконечного ряда

$$\{\eta_1(z), \eta_2(z')\}_{DB} = \sum_{a,b\in\mathbf{Z}}\{\eta_1^a, \eta_2^b\}_{DB} z^a (z')^b. \tag{2.38}$$

Данная процедура требует определённой осторожности, поскольку бесконечные суммы отдельных членов в выражениях (2.36), (2.37) расходятся, и для получения конечного ответа мы должны правильным образом скомбинировать подобные члены в этих выражениях перед тем, как производить суммирование.

Например, если мы полагаем $|q| < |z'| < |z| < 1$, то ряд в выражении (2.38), соответствующий второму члену в (2.37) оказывается расходящимися. Однако, если прибавить к этому члену подобное выражение из (2.36), то в результате ряд будет сходиться, и искомая r-матрица для матрицы Лакса (2.28) примет следующий вид

$$r(z, z') = \alpha_1\alpha_2[(E(z'/z) - E(z'))\sum_i e_{ii}\otimes e_{ii} +$$

$$+ \sum_{i\neq j}(\phi(z'/z, u_{ji}) - \phi(z', u_{ji}))e_{ij}\otimes e_{ji}]\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\,, \tag{2.39}$$

где

$$\alpha_1 = \alpha\otimes I\,, \qquad \alpha_2 = I\otimes\alpha\,,$$

а функция $E(z)$ может быть представлена в виде ряда

$$E(z) = \sum_{a\in\mathbf{Z}\, a\neq 0} \frac{z^a}{q^a - 1} - 1, \qquad |q| < |z| < 1. \tag{2.40}$$

Замечание 1. Классическая r-матрица эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином была впервые вычислена в работе [82]. В отличии от наших формул (2.28) и (2.39), которые исходно определены на эллиптической кривой, конечные выражения для матрицы Лакса и для r-матрицы в работе [82] определены на эллиптической кривой только после вспомогательной редукции.

Замечание 2. Эллиптическая система Калоджеро-Мозера с максимальным спиновым сектором может быть также описана в терминах матрицы Лакса и r-матрицы, которые определены как функции на эллиптической кривой, а не как сечения некоторого расслоения. А именно, матрица Лакса (2.28) и r-матрица (2.39) сопряжены к следующим матрично-значным функциям на Σ_τ

$$\begin{gathered} l^K_{ij}(w) = \sum_{k,l=1}^{N} \alpha_{ik} B_{kl}(w) (\alpha^{-1})_{lj}, \qquad B_{ii} = -\frac{v_i}{2\pi i}, \\ B_{ij}(w) = -\sum_{k=1}^{N} \beta_{ik}\alpha_{kj}\; \frac{\theta_{11}(w-u_j)\theta_{11}(w+u_j-u_i)\theta_{11}(u_i)\theta'_{11}(0)}{\theta_{11}(w)\theta_{11}(w-u_i)\theta_{11}(u_i-u_j)\theta_{11}(u_j)}, \quad i\neq j, \end{gathered} \tag{2.41}$$

$$\begin{gathered} \tilde r(w,w') = \sum_{i,j=1}^{N} (E(w-w') + E(w'))e_{ij}\otimes e_{ji} - \\ - \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \alpha_{il}(\alpha^{-1})_{lk}(E(w-u_l) + E(u_l))e_{ij}\otimes e_{jk}, \end{gathered} \tag{2.42}$$

где

$$w = \frac{1}{2\pi i}\ln z\,, \qquad w' = \frac{1}{2\pi i}\ln z'\,,$$

а

$$\theta_{11}(w) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \exp\left(\pi i\tau(m+1/2)^2 + 2\pi i(m+1/2)(w+1/2)\right).$$

Матрица Лакса эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином в таком виде была впервые получена в работе Кричевера [81].

Замечание 3. Примечательно, что при выводе формулы (2.39), основанном на гамильтоновой редукции, мы не использовали свойства эллиптических функций

$\phi(z,u)$ и $E(z)$, учёт которых неизбежен при непосредственной проверке правильности найденной r-матрицы. В определённом смысле мы получили эти тождества методом гамильтоновой редукции в классическом случае. Интересно отметить, что аналогичный вывод тождеств на эллиптические функции был впервые получен в рамках квантовой, а не классической редукции [83].

Полученная r-матрица (2.39) является универсальной в том смысле, что с помощью неё можно вывести классическую r-матрицу для системы Хитчина на эллиптической кривой с произвольной квази-параболической структурой в отмеченнной точке. Поясним последнее утверждение более подробно.

Пусть $\mathcal{P}$ параболическая подгруппа $SL_N(\mathbf{C})$. Тогда система Хитчина на эллиптической кривой с данной квази-параболической структурой в отмеченной точке получается из вышеописанной системы с максимальным спиновым сектором путём дальнейшей гамильтоновой редукции по действию параболической подгруппы $\mathcal{P}$

$$\alpha_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^{N} q_{ik}\alpha_{kj}\,, \quad \alpha_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^{N} \beta_{ik}(q^{-1})_{kj}\,, \quad u_i \mapsto u_i\,, \quad v_i \mapsto v_i\,, \tag{2.43}$$

где $q = ||q_{ij}|| \in \mathcal{P}$.

Отображение моментов действия (2.43) находится в виде

$$\begin{gathered}\mu^P \,:\, T^*\mathcal{M} \mapsto \mathrm{Lie}^*(\mathcal{P})\,, \qquad \mu^P[\alpha,\beta](X) = \mathrm{tr}(\alpha\beta X)\,, \\ X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{P}) \subset gl_N(\mathbf{C}).\end{gathered} \tag{2.44}$$

Отметим, что матрица Лакса (2.28) преобразуется при действии элемента $q \in \mathcal{P}$ следующим образом

$$l(z) \mapsto l^q(z) = ql(z)q^{-1}, \tag{2.45}$$

что согласуется с нашим общим предположением (2.4).

Таким образом, мы видим, что все условия, обеспечивающие возможность применения нашего метода для вывода классической r-матрицы, выполнены. Более того, поскольку гамильтонова редукция на этом этапе является конечномерной, любой выбор калибровочного условия χ^α, фиксирующего произвол (2.43), приводит нас к хорошо определённой формуле для искомой r-матрицы системы Хитчина

$$r^P(z,z') = (r(z,z') -$$
$$-(P^{-1})^\alpha_\beta e_\alpha \otimes \{\chi^\beta, l(z')\} + \frac{1}{2} Q^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes \{\mu^P_\beta, l(z')\})\Big|_{\mu^P_\alpha = \chi^\alpha = 0}, \tag{2.46}$$

где греческие индексы нумеруют некоторый базис $\{e_\alpha\}$ в подалгебре $Lie(\mathcal{P})$, обратимая матрица P имеет следующие элементы

$$P^\beta_\alpha = \{\mu^P_\alpha, \chi^\beta\},$$

и, наконец,

$$Q^{\alpha\beta} = (P^{-1})^\alpha_\gamma \{\chi^\gamma, \chi^\sigma\} (P^{-1})^\beta_\sigma .$$

Интересно отметить выделенную роль лиевости калибровочных преобразований в предложенном методе вычисления классической r-матрицы. Как мы увидим в следующей главе, интегрируемость редуцированной гамильтоновой системы не требует лиевости симметрий, по которым осуществляется редукция. Это наблюдение позволяет предположить, что существует более слабое условие инволютивности интегралов движения, чем условие (2.2).

Глава 3

Алгебра Склянина и деформация системы Калоджеро-Мозера.

В этой главе мы приводим пример двумерной интегрируемой системы, полученной путём гамильтоновой редукции по действию алгебры Склянина и являющейся деформацией двух-частичной рациональной системы Калоджеро-Мозера. Используя метод проектирования [7], мы явно решаем уравнения движения данной системы.

Всюду в этой главе греческие индексы принимают значения от 0 до 3, латинские индексы – от 1 до 3, и каждый раз, когда встречается комбинация индексов i, j, k, подразумевается, что они принимают значения $1, 2, 3$ вместе со всеми своими циклическими перестановками. Также всюду в этой главе

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial p_\mu},$$

а ∂_ν обозначает $\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$.

3.1 Построение интегрируемой системы.

Отправным пунктом нашей конструкции является расширенное фазовое пространство, являющееся кокасательным расслоением $T^*\mathbf{R}^4$, с заданной на нём канонической симплектической структурой

$$\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu, \tag{3.1}$$

где p_μ обозначают координаты на многообразии базы $\mathbf{R}^4$, а x^μ обозначают координаты в слое.

Определим на многообразии $\mathbf{R}^4$ квадратичную скобку Склянина

$$\{p_0, p_i\} = \alpha_{0i}(p) = J_{jk}p_j p_k, \qquad \{p_i, p_j\} = \alpha_{ij}(p) = p_0 p_k. \tag{3.2}$$

Коэффициенты J_{12}, J_{23} и J_{31} удовлетворяют следующему тождеству

$$J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0, \tag{3.3}$$

которое эквивалентно тождеству Якоби для скобки (3.2).

Условие (3.3) влечёт, что данные коэффициенты могут быть представлены в следующем виде

$$J_{ij} = J_i - J_j, \tag{3.4}$$

где значения констант J_i определяются с точностью до аддитивной постоянной c, $J_i \mapsto J_i + c$.

Следуя процедуре, описанной во введении, мы определяем аналог коприсоединённого действия на многообразии $\mathbf{R}^4$, используя пуассонову структуру (3.2).

$$\delta_\epsilon p_\mu = \alpha_{\mu\nu}(p)\epsilon^\nu(p), \tag{3.5}$$

где ϵ^ν – инфинитезимальные параметры.

Преобразования симметрии (3.5) могут быть подняты до канонических преобразований на кокасательном расслоении

$$\delta_\epsilon p_\mu = \alpha_{\mu\nu}\epsilon^\nu(p), \qquad \delta_\epsilon x^\mu = \partial^\mu(\alpha_{\nu\lambda}\epsilon^\nu(p)x^\lambda). \tag{3.6}$$

Гамильтоновы генераторы этих преобразований имеют следующий вид[1]

$$M_\epsilon = \alpha(\epsilon, x) = \alpha_{\mu\nu}(p)\epsilon^\mu x^\nu. \tag{3.7}$$

Для того, чтобы построить нетривиальную динамическую систему, рассмотрим поверхность ненулевого уровня гамильтоновых генераторов (3.7) в расши-

[1]таким образом, мы строим так называемый гамильтонов алгеброид [84] на $T^*\mathbf{R}^4$. В работе [84] было показано, что с любым алгеброидом Ли можно естественным образом связать некоторый гамильтонов алгеброид

ренном фазовом пространстве $T^*\mathbf{R}^4$. По аналогии со случаем системы Калоджеро-Мозера мы полагаем

$$
\begin{aligned}
M_0 &= J_{23}p_2p_3x^1 + J_{31}p_3p_1x^2 + J_{12}p_1p_2x^3 = 0, \\
M_1 &= p_0(x^2p_3 - x^3p_2) - J_{23}p_2p_3x^0 = \nu, \\
M_2 &= p_0(x^3p_1 - x^1p_3) - J_{31}p_3p_1x^0 = 0, \\
M_3 &= p_0(x^1p_2 - x^2p_1) - J_{12}p_1p_2x^0 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Редукция симплектической формы (3.1) на поверхность связей (3.8) даёт вырожденную 2-форму, чьё ядерное распределение натягивается на следующее векторное поле

$$
\begin{aligned}
\delta p_0 &= J_{23}p_2p_3, & \delta x^0 &= (x^2p_3 - x^3p_2), \\
\delta p_1 &= 0, & \delta x^1 &= 0, \\
\delta p_2 &= -p_0p_3, & \delta x^2 &= -(p_0x^3 + J_{23}p_3, x^0)\epsilon^1 \\
\delta p_3 &= p_0p_2, & \delta x^3 &= (p_0x^2 - J_{23}p_2x^0).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Фазовое пространство нашей системы определяется как фактор поверхности связей (3.8) по отношению к преобразованиям, сгенерированным векторным полем (3.9). Эти преобразования мы, в дальнейшем, условно называем калибровочными.

Мы осуществляем редукцию, используя калибровочное условие $x^2 = 0$, которое как легко видеть имеет поверхность горизонта, заданную уравнением

$$
p_0x^3 - J_{32}p_3x^0 = 0\,. \tag{3.10}
$$

Другими словами, для точек, лежащих на поверхности (3.10), координата x^2 не может быть изменена при помощи преобразования (3.9), и, следовательно, часть калибровочных орбит не может быть описана с помощью выбранного калибровочного условия. В последующем, мы увидим, что следствием наличия этого горизонта будет являться сингулярность одного из гамильтонианов полученной системы.

Рассматривая пересечение поверхности связей (3.8) с поверхностью $x^2 = 0$, мы получаем вложение редуцированного фазового пространства в расширенное фазовое пространство $T^*\mathbf{R}^4$

$$\begin{aligned} &x^0 = u^1, \quad x^1 = 0, \qquad && x^2 = 0, && x^3 = u^2, \\ &p_0 = v_1, \quad p_1 = 0, \quad && p_2 = -\frac{\nu}{v_1 u^2 - J_{32} v_2 u^1}, \quad && p_3 = v_2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где u^1, v_1, u^2, v_2 – канонические координаты, параметризующие редуцированное фазовое пространство.

Пара функций Казимира скобки Склянина

$$C_1 = \frac{1}{2}\sum_l (p_l)^2, \qquad C_2 = \frac{1}{2}((p_0)^2 + \sum_l J_l (p_l)^2) \tag{3.12}$$

обеспечивает нас необходимым набором независимых коммутирующих гамильтонианов, явные выражения для которых в терминах канонических переменных u^1, v_1, u^2, v_2 имеют вид[2]

$$H_1 = \frac{(v_2)^2}{2} + \frac{\nu^2}{2(v_1 u^2 - J_{32} u^1 v_2)^2}, \qquad H_2 = \frac{(v_1)^2}{2} + J_{32}\frac{(v_2)^2}{2}, \tag{3.13}$$

где мы положили $J_2 = 0$, используя произвол в определении констант J_i.

Заметим, что полученная система является деформацией рациональной системы Калоджеро-Мозера, поскольку в случае экспоненциально вырожденной скобки Склянина $J_{23} = 0$ мы приходим к системе со следующими гамильтонианами

$$H_1 = \frac{(v_2)^2}{2} + \frac{\nu^2}{2(v_1 u^2)^2}, \qquad H_2 = \frac{(v_1)^2}{2}, \tag{3.14}$$

которые описывают динамику двух-частичной системы Калоджеро-Мозера с координатой центра масс u_1 и константой взаимодействия, зависящей от значения импульса центра масс.

3.2 Метод проектирования

В данном разделе мы покажем, что несмотря на более сложную природу калибровочной симметрии, уравнения движения для полученной системы (3.13)

[2] легко видеть, что первый из гамильтонианов имеет сингулярность в точках пересечения с поверхностью горизонта 3.10

могут быть явно решены с помощью метода проектирования [7]. Опишем коротко основную идею этого метода.

Каждая точка на редуцированном фазовом пространстве задаёт некоторую калибровочную орбиту на поверхности связей, где динамика определяется калибровочно инвариантными гамильтонианами ((3.12) в нашем случае). Каждой точке кривой эволюции, заданной любым из гамильтонианов (3.12), мы ставим в соответствие её калибровочную орбиту и, таким образом, получаем эволюцию в пространстве орбит. В результате, пересечения этих орбит с поверхностью калибровки и определяют эволюцию интегрируемой системы.

Таким образом, метод проектирования может быть применён к решению уравнений движения, если явно решены уравнения движения для калибровочно инвариантных гамильтонианов, а также явно описаны калибровочные орбиты.

В нашем случае первая из задач решается тривиально, поскольку калибровочно инвариантные гамильтонианы зависят только от половины коммутирующих фазовых переменных, в то время как вторая задача оказывается более интересной и сводиться к решению уравнений движения эллиптического волчка.

По определению, калибровочные орбиты являются интегральными кривыми векторного поля (3.9)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}p_0 &= J_{23}p_2p_3, & \frac{d}{ds}x^0 &= (x^2p_3 - x^3p_2),\\
\frac{d}{ds}p_1 &= 0, & \frac{d}{ds}x^1 &= 0,\\
\frac{d}{ds}p_2 &= -p_0p_3, & \frac{d}{ds}x^2 &= -(p_0x^3 + J_{23}p_3x^0),\\
\frac{d}{ds}p_3 &= p_0p_2, & \frac{d}{ds}x^3 &= (p_0x^2 - J_{23}p_2x^0),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где s – параметр на кривой.

Заметим, что правая часть уравнений на импульсы p_μ содержит только импульсы, и, следовательно, эти уравнения можно решать независимо. Далее, поскольку преобразования (3.9) являются каноническими, оставшиеся уравнения легко решить в следующем виде

$$x^\mu(s) = \frac{\partial p^0_\nu}{\partial p_\mu} x^\nu_0, \tag{3.16}$$

где x_0^μ, p_ν^0 обозначают начальные данные для системы (3.15), а в выражении $\dfrac{\partial p_\nu^0}{\partial p_\mu}$ подразумевается, что начальные данные p_ν^0 выражены через промежуточные значения p_μ.

Заметим, что фазовые переменные x^1, p_1 не меняются при калибровочных преобразованиях, и поэтому в последующих формулах мы будем опускать их.

Легко видеть, что система дифференциальных уравнений на импульсы p_μ аналогична системе уравнений движения для обычного $\mathbf{so_3}$-волчка [6]. Используя эту аналогию, мы сразу же находим два независимых интеграла для системы (3.15)

$$A = \sqrt{(p_2)^2 + (p_3)^2}, \qquad B = \sqrt{(p_0)^2 + J(p_3)^2}, \tag{3.17}$$

где $J = J_{32}$ (мы будем для определённости полагать $J > 0$).

Рассмотрим интегралы (3.17) как новые независимые координаты в импульсном пространстве. Третью координату мы будем выбирать двумя различными способами. Первый способ состоит в добавлении к (3.17) следующей угловой переменной

$$\varphi = arctg(p_3/p_2). \tag{3.18}$$

В этом случае обратная замена координат задаётся в виде

$$p_0 = \sqrt{B^2 - JA^2 sin^2\varphi}, \qquad p_2 = Acos\varphi, \qquad p_3 = Asin\varphi. \tag{3.19}$$

Во втором способе третья координата выбирается в виде

$$\varphi_2 = arctg(\sqrt{J}p_3/p_0), \tag{3.20}$$

и в этом случае мы имеем

$$p_0 = Bcos\varphi_2, \qquad p_2 = \sqrt{A^2 - \frac{B^2}{J} sin^2\varphi_2}, \qquad p_3 = \frac{B}{\sqrt{J}} sin\varphi_2. \tag{3.21}$$

Первый выбор третьей координаты приемлем, если

$$k = \frac{\sqrt{J}A}{B} < 1, \tag{3.22}$$

поскольку в этом случае выражение $B^2 - JA^2 sin^2\varphi$ не меняет знак. Если же неравенство (3.22) не выполнено, то мы должны использовать второй выбор координат на пространстве импульсов.

Метод проектирования работает в обоих случаях, и в обоих случаях он основан на одной и той же последовательности шагов. По этой причине мы рассматриваем здесь только первый из этих случаев, считая что неравенство (3.22) выполнено.

В последующем, оказывается более удобным использовать вместо координат x^0, x^2, x^3 другие координаты, которые канонически сопряжены переменным A, B и φ. Эти координаты имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
x_A &= x^2 cos\varphi + x^3 sin\varphi - \frac{JAsin^2\varphi}{\sqrt{B^2 - JA^2 sin^2\varphi}} x^0, \\
x_B &= \frac{Bx^0}{\sqrt{B^2 - JA^2 sin^2\varphi}}, \\
x_\varphi &= -Ax^2 sin\varphi + Ax^3 cos\varphi - \frac{JA^2 sin\varphi cos\varphi}{\sqrt{B^2 - JA^2 sin^2\varphi}} x^0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

В терминах A, B, φ, x_A, x_B и x_φ решения системы (3.15) находится в виде

$$\begin{gathered}
\varphi(s) = am(Bs + F(\varphi_0; k); k), \qquad A(s) = A_0 \qquad B(s) = B_0, \\
x_\varphi(s) = \sqrt{\frac{1 - k^2 sin^2\varphi_0}{1 - k^2 sin^2\varphi}} x^0_\varphi, \\
x_A(s) = x^0_A + \frac{\sqrt{J}}{B}\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi_0}\,(F_k(\varphi; k) - F_k(\varphi_0; k))x^0_\varphi, \\
x_B(s) = x^0_B - \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi_0}\,(s + \frac{A\sqrt{J}}{B^2}[F_k(\varphi; k) - F_k(\varphi_0; k)])x^0_\varphi,
\end{gathered} \tag{3.24}$$

где $u = am(t; k)$ – функция Якоби, обратная к эллиптическому интегралу первого рода

$$F(u; k) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 sin^2 t}},$$

$F_k(u; k)$ обозначает соответствующую производную

$$F_k(u; k) = \int_0^u \frac{k sin^2 t dt}{(1 - k^2 sin^2 t)^{3/2}},$$

а $A_0, B_0, \varphi_0, x^0_A, x^0_B x^0_\varphi$ – начальные данные для соответствующих фазовых переменных.

Предположим теперь, что нам заданы начальные данные $\bar{u}^1, \bar{v}_1, \bar{u}^2, \bar{v}_2$ для уравнений движения редуцированной системы (3.13)

$$\begin{aligned}
\partial_{t_1} u^1 &= -\frac{\nu^2 u^2}{(v_1 u^2 - J v_2 u^1)^3}, \qquad \partial_{t_2} u^1 = v_1, \\
\partial_{t_1} u^2 &= v_2 + \frac{J\nu^2 u^1}{(v_1 u^2 - J v_2 u^1)^3}, \quad \partial_{t_2} u^2 = J v_2, \\
\partial_{t_1} v_1 &= -\frac{J\nu^2 v_2}{(v_1 u^2 - J v_2 u^1)^3}, \qquad \partial_{t_2} v_1 = 0, \\
\partial_{t_1} v_2 &= \frac{\nu^2 v_1}{(v_1 u^2 - J v_2 u^1)^3}, \qquad \partial_{t_2} v_2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

При помощи вложения (3.11) начальная точка кривой (3.25) отображается в точку расширенного фазового пространства с координатами $\bar{x}^\mu, \bar{p}_\nu$, такими, что $\bar{x}^1 = \bar{p}_1 = 0$ и калибровочное условие $\bar{x}^2 = 0$ выполнено.

В терминах координат (3.17), (3.18), (3.23), калибровочное условие и инвариантные гамильтонианы (3.12) принимают следующий вид

$$A x_A cos\varphi = x_\varphi sin\varphi, \tag{3.26}$$

$$C_1 = \frac{(p_1)^2}{2} + \frac{A^2}{2}, \qquad C_2 = J_1\frac{(p_1)^2}{2} + \frac{B^2}{2}. \tag{3.27}$$

Решая уравнения движения, заданные гамильтонианами (3.27) мы видим, что импульсы (3.17) и (3.18), а также переменные x^1 и p_1 сохраняются, а координаты (3.23) оказываются линейными функциями времён t_1 и t_2, соответствующим гамильтонианам C_1 и C_2 (3.27), а именно

$$\begin{aligned}
x^1_0 &= 0, \qquad p^0_1 = 0, \\
x^0_\varphi &= \bar{x}_\varphi, \qquad \varphi_0 = \bar{\varphi}, \\
x^0_A &= \bar{x}_A + \bar{A} t_1, \quad A_0 = \bar{A}, \\
x^0_B &= \bar{x}_B + \bar{B} t_2, \quad B_0 = \bar{B}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Здесь мы приписали всем фазовым переменным индекс 0, указывающий на то, что они рассматриваются как начальные данные для системы (3.15).

Подставляя теперь фазовые переменные кривой (3.24) с начальными данными (3.28) в условие калибровки (3.26), мы получаем следующее уравнение

$$\bar{A}(\bar{x}_A + \bar{A}t_1) = \bar{x}_\varphi \left(\sqrt{\frac{1 - k^2 sin^2\bar{\varphi}}{1 - k^2 sin^2\varphi(s)}} tg\varphi(s) - \right.$$

$$\left. -k\sqrt{1 - k^2 sin^2\bar{\varphi}} \left(F_k(\varphi(s); k) - F_k(\bar{\varphi}; k)\right) \right), \tag{3.29}$$

где $k = \dfrac{\sqrt{J}\bar{A}}{\bar{B}}$.

Поскольку правая часть уравнения (3.29) явно не зависит от параметра s, мы можем трактовать (3.29) как уравнение, определяющее неявную функцию φ от t_1. Действительно, если мы выделим зависимость от φ в правой части уравнения (3.29), мы получим функцию

$$f(\varphi) = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}} - kF_k(\varphi; k)$$

с положительной производной

$$f'(\varphi) = \frac{1}{cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}} > 0.$$

Таким образом, пересечение орбит, проходящих через точки фазовой кривой (3.28), с поверхностью калибровки (3.26) задаётся следующими уравнениями

$$\begin{gathered} x_\varphi(t_1, t_2) = \bar{x}_\varphi \sqrt{\frac{1 - k^2 sin^2\bar{\varphi}}{1 - k^2 sin^2\varphi(t_1)}}, \qquad x_A(t_1, t_2) = \frac{tg\varphi(t_1)}{\bar{A}} \bar{x}_\varphi \sqrt{\frac{1 - k^2 sin^2\bar{\varphi}}{1 - k^2 sin^2\varphi(t_1)}}, \\ x_B(t_1, t_2) = \bar{x}_B + \bar{B}t_2 - \frac{\bar{x}_\varphi}{\bar{B}} \sqrt{1 - k^2 sin^2\bar{\varphi}} \left(F(\varphi(t_1); k) - F(\bar{\varphi}; k)\right) + \\ + \frac{\bar{A}\sqrt{J}}{\bar{B}^2} (F_k(\varphi(t_1); k) - F_k(\bar{\varphi}; k)), \\ A = \bar{A}, \qquad B = \bar{B}, \qquad \varphi = \varphi(t_1), \end{gathered} \tag{3.30}$$

где $\varphi(t_1)$ – неявная функция заданная уравнением (3.29).

Используя уравнения (3.30), мы получаем явные решения для системы (3.25)

$$\begin{gathered} u^1(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{\bar{B}^2 - J\bar{A}^2 sin^2\varphi(t_1)}}{\bar{B}} x_B(t_1, t_2), \\ u^2(t_1, t_2) = x_A(t_1, t_2) sin\varphi(t_1) + \frac{x_\varphi(t_1, t_2)}{\bar{A}} \cos\varphi(t_1) + \frac{J\bar{A}}{\bar{B}} x_B(t_1, t_2) sin\varphi(t_1), \\ v_1(t_1, t_2) = \sqrt{\bar{B}^2 - J\bar{A}^2 sin^2\varphi(t_1)}, \qquad v_2(t_1, t_2) = \bar{A} sin\varphi(t_1), \end{gathered} \tag{3.31}$$

где начальные данные в расширенном фазовом пространстве могут быть получены с помощью следующих формул

$$
\begin{gathered}
\bar{A} = \sqrt{(\bar{v}_2)^2 + \frac{\nu^2}{(\bar{v}_1\bar{u}^2 - J\bar{v}_2\bar{u}^1)^2}}, \qquad \bar{B} = \sqrt{(\bar{v}_1)^2 + J(\bar{v}_2)^2}, \\
\bar{\varphi} = -arctg\frac{\bar{v}_2(\bar{v}_1\bar{u}^2 - J\bar{v}_2\bar{u}^1)}{\nu}, \\
\bar{x}_A = \bar{u}^2 sin\bar{\varphi} - \frac{J\bar{A}sin^2\bar{\varphi}}{\sqrt{\bar{B}^2 - J\bar{A}^2 sin^2\bar{\varphi}}}\bar{u}^1, \\
\bar{x}_B = \frac{\bar{B}\bar{u}^1}{\sqrt{\bar{B}^2 - J\bar{A}^2 sin^2\bar{\varphi}}}, \\
\bar{x}_\varphi = \bar{A}\bar{u}^2 cos\bar{\varphi} - \frac{J\bar{A}^2 sin\bar{\varphi}cos\bar{\varphi}}{\sqrt{\bar{B}^2 - J\bar{A}^2 sin^2\bar{\varphi}}}\bar{u}^1.
\end{gathered} \tag{3.32}
$$

Было бы интересно провести аналогичную гамильтонову редукцию по действию алгебры Одесского-Фейгина [85], обобщающую алгебру Склянина (3.2) на высшие размерности, и получить многочастичный аналог рассмотренной системы. Можно предположить, что соответствующий метод проектирования для такой системы будет основан на решении уравнений движения эллиптических волчков [86], сформулированных в произвольной размерности.

Часть II

Построение квантовых алгебр методом Федосова.

Глава 4

Деформационное квантование многообразий Федосова виковского типа

В данном разделе мы рассмотрим обобщение метода квантовой редукции Федосова, которое позволяет дать координатно инвариантное определение виковского звёздочка-произведения для наиболее широкого класса симплектических многообразий. Мы опишем геометрию таких многообразий, а также докажем теорему эквивалентности виковского и вейлевского звёздочка-произведений.

4.1 Многообразия Федосова виковского типа.

Отправной точкой наших обсуждений будет являться $2n$-мерное вещественное многообразие M, оснащённое комплексно-значной билинейной формой (не обязательно симметричной или антисимметричной) В локальных координатах $\{x^i\}$ на M форма Λ однозначно определяется своими компонентами $\Lambda_{ij} = \Lambda(\partial_i, \partial_j)$, где $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. Задание формы Λ определяет два отображения из комплексифицированного касательного в комплексифицированное кокасательное расслоение, а именно, произвольному векторному полю X ставятся в соответствие следующие 1-формы

$$\Lambda(\cdot, X)\ , \qquad \Lambda^t(\cdot, X) = \Lambda(X, \cdot), \tag{4.1}$$

где Λ^t определяется как транспонированная матрица к Λ. Обозначим за $\ker \Lambda$ и $\ker \Lambda^t$ соответственно правое и левое ядерные распределения Λ.

В дальнейшем нам потребуется разложение Λ на симметричную и антисимметричную части

$$\Lambda = \omega + g \ , \quad \omega = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^t) \ , \quad g = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^t). \tag{4.2}$$

Определение 4.1.1 *Назовём пару (M, Λ) почти федосовским многообразием виковского типа (почти ФВ-многообразием), если в каждой точке $p \in M$*

i) $\omega = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^t)$ *– вещественная невырожденная 2-форма,*

ii) $\dim_{\mathbf{C}} \ker \Lambda = \frac{1}{2} \dim M$.

Первое из условий попросту означает, что антисимметричная часть Λ определяет на M почти симплектическую структуру ω. Из второго условия следует, что подпространства левого и правого ядерных распределений в каждой точке $x \in M$ трансверсальны, и их прямая сумма совпадает с комплексифицированным касательным пространством $T^{\mathbf{C}}_x M$.

Действительно, условие того, что векторное поле X (Y) принадлежит левому (правому) распределению $\Lambda(X, \cdot) = 0$ $(\Lambda(\cdot, Y) = 0)$, может быть переписано в следующем виде

$$IX = X \ , \qquad IY = -Y, \tag{4.3}$$

где гладкое поле автоморфизмов $I(x) : T^{\mathbf{C}}_x M \to T^{\mathbf{C}}_x M$ в любых локальных координатах определяется матрицей

$$I^i_j = \omega^{ik} g_{kj}, \tag{4.4}$$

ω^{ij} – обратная матрица к ω_{ij}, $\omega^{ik}\omega_{kj} = \delta^i_j$.

Векторы X и Y линейно независимы, поскольку отвечают разным собственным значениям (± 1) отображения I. Следовательно, $\ker \Lambda \cap \ker \Lambda^t = 0$. С учетом условия на размерность распределений мы заключаем, что $\ker \Lambda(x) \oplus \ker \Lambda^t(x) = T^{\mathbf{C}}_x M$, $\forall x \in M$.

Помимо этого мы доказали, что форма g невырождена, и автоморфизм I инволютивен, то есть

$$I^2 = Id. \tag{4.5}$$

В дальнейшем мы будем называть I почти инволютивной структурой.

Имеют место два важных частных случая почти инволютивной структуры I (4.5). В первом случае тензор I имеет чисто мнимые компоненты в локальных вещественных координатах, и тогда он определяет (и определяется) почти комплексной структурой J, $I = \sqrt{-1}J$, а во втором случае, когда его компоненты вещественны, I называют тензором почти паракомплексной структуры [87]. Легко заметить, что первый случай соответствует анти-эрмитовой матрице тензора Λ, $\Lambda^t = -\overline{\Lambda}$, а во втором случае компоненты тензора Λ оказываются вещественными.

Как известно, почти комплексная структура является комплексной, если она определяет структуру комплексного многообразия. Согласно теореме Ньюлендера-Ниренберга [88] последнее эквивалентно условию равенства нулю тензора Нёйенхёйса, ассоциированного с J, а равенство нулю тензора Нёйенхёйса, в свою очередь, эквивалентно инволютивности векторных распределений, отвечающих собственным значениям $\pm\sqrt{-1}$ автоморфизма J. Как мы увидим ниже, теорема, аналогичная теореме Ньюлендера-Ниренберга может быть доказана для любой почти инволютивной структуры I.

Определение 4.1.2 *Тензором Нёйенхёйса почти инволютивной структуры I называется гладкое тензорное поле антисимметричных билинейных отображений $N : T_x^{\mathbf{C}}M \wedge T_x^{\mathbf{C}}M \to T_x^{\mathbf{C}}M$, которое может быть определено двумя эквивалентными способами:*

i) для произвольной пары гладких векторных полей X и Y

$$N(X, Y) = [X, Y] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [IX, IY] \ , \tag{4.6}$$

где скобка $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор векторных полей;

ii) пусть ∇ – произвольная симметричная связность, тогда в локальных координатах $\{x^i\}$ компоненты тензора N задаются следующим образом

$$N_{ij}^k = I_i^l \nabla_l I_j^k - I_j^l \nabla_l I_i^k - I_l^k (\nabla_i I_j^l - \nabla_j I_i^l). \tag{4.7}$$

Легко проверить, что соотношения (4.6), (4.7) действительно определяют (один и тот же) тензор, поскольку правая часть уравнения (4.6) не зависят от производных компонент полей X, Y, а правая часть уравнения (4.7) не зависит от выбора симметричной связности ∇.

Перед тем как анализировать условие $N = 0$, мы приведём ещё одно важное определение.

Определение 4.1.3 *Почти ФВ-многообразие (M, Λ) называется ФВ-многообразием, если на нём существует симметричная связность ∇, согласованная с тензором Λ, то есть такая, что $\nabla_i \Lambda_{jk} = 0$.*

Очевидно, что форма Λ ковариантно постоянна тогда и только тогда, когда и симметричная, и антисимметричная части ковариантно постоянны, то есть

$$\nabla_i \Lambda_{jk} = 0 \Leftrightarrow \nabla_i \omega_{jk} = \nabla_i g_{jk} = 0.$$

Поскольку существует единственная симметричная связность, согласованная с данной невырожденной симметричной формой g, то существование этой связности автоматически означает её единственность. С другой стороны, условие $\nabla_i \omega_{jk} = 0$ с симметричной связностью ∇ влечёт условие замкнутости $d\omega = 0$, формы ω . Таким образом, мы заключаем, что любое ФВ-многообразие является также симплектическим.

Подчеркнём, что в общем случае мы имеем дело с комплексно-значной формой g, и значит связность, в том случае когда она существует, действует в комлексифицированном касательном пространстве и определяется в локальных координатах комплексно-значными символами Кристоффеля. Следующая теорема даёт критерий существования симметричной связности ∇, согласованной со структурой Λ почти ФВ-многообразия.

Теорема 4.1.1 *Пусть* (M, Λ) *– почти ФВ-многообразие с замкнутой антисимметричной частью* $\omega = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^t)$ *, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. Λ *определяет структуру ФВ-многообразия,*

2. *инволютивная структура* I*, ассоциированная с* Λ*, имеет нулевой тензор Нёйенхёйса,*

3. *ядерные распределения* $\ker \Lambda$ *и* $\ker \Lambda^t$ *инволютивны.*

Несмотря на простоту этой теоремы, мы приведём соответствующее доказательство, поскольку используемые здесь конструкции имеют прямое отношения к деформационному квантованию.

Доказательство. Мы будем следовать схеме: 1. $\Leftrightarrow$ 2., 2. $\Leftrightarrow$ 3.

Импликация 1. $\Rightarrow$ 2. непосредственно следует из второго определения тензора Нёйенхёйса (4.7), если в последнем взять в качестве ∇, связность, согласованную с Λ (и, следовательно, с I).

Обратно, пусть ∇ является симметричной связностью, сохраняющей g. Используя замкнутость формы ω, мы можем легко привести выражение для тензора Нёйенхёйса (4.7) к следующему виду

$$N^i_{jk} = 2\omega^{il}\nabla_l\omega_{jk}.$$

Последнее утверждение доказывает требуемую импликацию 2. $\Rightarrow$ 1.

Пусть теперь X и Y – два собственных векторных поля для тензора инволюции, отвечающие одному собственному значению α, $\alpha^2 = 1$. Вычисляя значение N (4.6) на этих векторных полях, мы получаем

$$N(X,Y) = 2([X,Y] - \alpha I[X,Y]). \tag{4.8}$$

Таким образом, если $N = 0$, то $I[X,Y] = \alpha[X,Y]$ и, следовательно, собственные распределения I являются инволютивными. Это доказывает импликацию 2. $\Rightarrow$ 3. Из соотношения (4.8) также видно, что N обращается в ноль на любой паре векторных полей, принадлежащих одному и тому же ядерному распределению $\ker\Lambda$ или $\ker\Lambda^t$ в том случае, когда $\ker\Lambda$ и $\ker\Lambda^t$ инволютивны.

Если поля X и Y принадлежат разным распределениям, отвечающим собственным значениям α и $-\alpha$ соответственно, то тензор Нёйенхёйса на этих полях обращается в нуль тождественно:

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= [X,Y] - I[IX,Y] - I[X,IY] + [IX,IY] = \\ &= [X,Y] - \alpha I[X,Y] + \alpha I[X,Y] - [X,Y] = 0. \end{aligned}$$

Поскольку векторы левого и правого ядерных распределений образуют базис в T_xM, $\forall\ x \in M$, то последнее утверждение доказывает импликацию 3. $\Rightarrow$ 2. и завершает доказательство теоремы.

Легко видеть, что правое и левое ядерные распределения являются лагранжевыми на ФВ-многообразии (M,Λ) и, следовательно, задают пару трансверсальных поляризаций P_R, P_L. Существование таких поляризаций имеет большое значение для физических приложений как в рамках деформационного так и геометрического квантования, поскольку данная конструкция позволяет ввести понятие состояния для квантово-механической системы.

Квантование на симплектических многообразиях оснащённых парой трансверсальных поляризаций интенсивно изучалось в двух предельных случаях:

$P_R = \overline{P}_L$, $P_R \cap \overline{P}_L = 0$. Первый случай приводит нас к кэлеровому многообразию с голоморфной и анти-голоморфной поляризациями, а во втором случае мы, пользуясь теоремой Фробениуса, получаем симплектическое многообразие с парой трансверсальных лагранжевых слоений.

Заметим, что для вещественной формы $\Lambda = g + \omega$ листы слоений P_R, P_L, являясь лагранжевыми подмногообразиями по отношению к симплектической структуре ω, оказываются вполне геодезическими по отношению к (псевдо-)римановой метрике g. Последнее можно доказать непосредственной проверкой.

Частными случаями ФВ-многообразий являются кэлеровы и так называемые паракэлеровы многообразия [87]. Прежде чем дать определение паракэлерова многообразия мы напомним, что *паракомплексным многообразием* называется чётномерное многообразие с заданным на нём вещественным тензором I, удовлетворяющим условию инволютивности (4.5), и таким, что его собственные распределения имеют одинаковую размерность и являются интегрируемыми. Паракэлеровым многообразием называется паракомплексное многообразие с (псевдо-)римановой метрикой g, такой что форма

$$\omega(X,Y) = g(X, IY) \tag{4.9}$$

является симплектической. В силу определяющего уравнения (4.4) и условия инволютивности (4.5) мы заключаем, что любое паракэлерово многообразие наделено ФВ-структурой.

В том случае когда форма Λ является анти-эрмитовой, она естественным образом определяет эрмитову кэлерову $(1,1)-$форму $h = h_{a\bar{b}} dz^a \otimes d\bar{z}^b$, $\Lambda = \sqrt{-1}h$. Интегрируемая инволютивная структура I в этом случае связана с соответствующей комплексной структурой J, $I = \sqrt{-1}J$, а пара инволютивных ядерных распределений формы Λ в точности совпадает с парой сопряжённых друг другу голоморфной и антиголоморфной поляризаций.

Заметим, что все двумерные ориентируемые многообразия допускают структуру ФВ-многообразия, поскольку все они могут быть оснащены кэлеровой метрикой. Верно и более сильное утверждение, состоящее в том, что любое двумерное ориентируемое многообразие, допускает структуру ФВ-многообразия, для которой симметричная часть формы Λ совпадает с наперёд заданной (псевдо-)римановой метрикой.

Действительно, пусть M – двумерное многообразие, оснащённое (псевдо-)римановой метрикой g и пусть $\omega = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge dx^2$ – соответствующая форма объёма. Тогда форма

$$\Lambda = g + \alpha\omega$$

согласована с метрической связностью для любого $\alpha \in \mathbf{C}$.

Легко видеть, что Λ определяет структуру ФВ-многообразия, если и только если

$$\det \Lambda = \det g + \alpha^2 |\det g| = 0.$$

Это условие фиксирует значения $\alpha = \pm\sqrt{-1}$ для римановой метрики ($\det g > 0$) и $\alpha = \pm 1$ для (псевдо-)римановой метрики.

Первый случай соответствует кэлеровому многообразию, а последний отвечает случаю паракэлерова многообразия [87]. Примером для последней ситуации может послужить однополостный гиперболоид, вложенный в трёх-мерное пространство, как поверхность, заданная уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

в декартовых координатах (x, y, z) $\mathbf{R}^3$.

Индуцированная метрика на гиперболоиде является псевдо-римановой и определяет паракэлерову структуру. Интегральные листы собственных распределений соответствующей паракомплексной структуры I совпадают с двумя наборами трансверсальных линейных элементов гиперболоида, которые, в свою очередь, оказываются изотропными геодезическими для метрики g.

4.2 Деформационное квантование на ФВ-многообразиях.

Пусть (M, Λ) является ФВ-многообразием размерности $2n$. Воспользуемся тем фактом, что форма Λ разлагается в сумму невырожденных симметричной и антисимметричной форм, и определим следующее контравариантное тензорное поле второго ранга

$$\Lambda^{ij} = \omega^{im}\Lambda_{mn}\omega^{nj} = g^{ij} + \omega^{ij},$$

где матрицы ω^{ij} и g^{ij} являются обратными к ω_{ij} и g_{ij}, соответственно. По построению,

$$rank(\Lambda^{ij}) = rank(\Lambda_{ij}) = n,$$

и ω^{ij} оказывается пуассоновым тензором.

Под деформационным квантованием ФВ-многообразия (M,Λ) мы будем понимать построение ассоциативной операции звёздочка-произведения функций, являющейся одно-параметрической деформацией обычного умножения в алгебре гладких функций $C^\infty(M)$ и удовлетворяющей следующему условию квази-классического предела:

$$a * b = ab + \frac{i\hbar}{2}\Lambda^{ij}\partial_i a \partial_j b + \dots, \tag{4.10}$$

где $\hbar$ – формальный параметр деформации ("постоянная Планка"), а троеточие обозначает члены более высокого порядка по $\hbar$. Условие (4.10) является совместным с так называемым *принципом соответствия* квантовой механики:

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{i\hbar}(a*b - b*a) = \{a,b\}, \tag{4.11}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ – скобка Пуассона, ассоциированная с ω^{ij}.

Помимо условия (4.10) и требования ассоциативности мы также будем подразумевать условие локальности для звёздочка-произведения

$$supp(f*g) = supp(f) \cap supp(g). \tag{4.12}$$

Это условие в точности означает, что все члены формального ряда (4.10) по $\hbar$ являются дифференциальными операторами конечного порядка по аргументам a и b. Заметим, что исходная алгебра гладких функций $C^\infty(M)$ незамкнута по отношению к введённому произведению (4.10), поскольку $\hbar$ является формальным (а не числовым) параметром. По этой причине вместо исходной алгебры функций мы будем рассматривать более широкую алгебру $C^\infty(M)[[\hbar]]$, состоящую из формальных рядов: $a(x,\hbar) = a_0(x) + \hbar a_1(x) + \hbar^2 a_2(x) + \dots,\ a_i(x) \in C^\infty(M)$. Пространство $C^\infty(M)[[\hbar]]$ оказывается уже замкнутым по отношению к произведению (4.10) и может трактоваться как алгебра квантовых наблюдаемых, по аналогии с тем как пуассонова алгебра гладких функций $C^\infty(M)$ на симплектическом многообразии (M,ω) отождествляется с алгеброй классических наблюдаемых.

В данном разделе мы покажем, что квантование ФВ-многообразия в вышеуказанном смысле может быть построено путём минимальной модификации исходной конструкции Федосова [19].

Определение 4.2.1 *Формальной алгеброй символов $\mathcal{A}$ называется ассоциативная унитальная алгебра над* $\mathbf{C}$, *чьи элементы имеют следующий вид*

$$a(x,y,dx,\hbar) = \sum_{2k+p,q\geq 0} \hbar^k a_{k,i_1\dots i_p j_1\dots j_q}(x) y^{i_1}\dots y^{i_p} dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}. \tag{4.13}$$

Коэффициенты разложения $a_{k,\,i_1\dots i_p j_1\dots j_q}(x)$ являются компонентами ковариантных тензорных полей на M, симметричными по индексам $i_1,\dots,i_p$ и антисимметричными по индексам $j_1,\dots,j_q$, $\{y^i\}$ – переменные, преобразующиеся как компоненты касательного вектора. Всем членам разложения (4.13) мы приписываем пару неотрицательных целых чисел $(2k+p,q)$ и определяем $\mathcal{A}_{2k+p,q}$ как подмножество всех элементов с данной би-степенью. Произведение двух элементов $a,b\in\mathcal{A}$ определяется следующей формулой

$$a\circ b = exp\left(\frac{i\hbar}{2}\Lambda^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right)a(x,y,dx,\hbar)\wedge b(x,z,dx,\hbar)|_{z=y}\ , \tag{4.14}$$

где $\wedge$ обозначает внешнее произведение дифференциальных форм.

Легко видеть, что произведение (4.14) ассоциативно и би-градуировано, то есть $\mathcal{A}_{m,n}\circ\mathcal{A}_{k,l}\subset\mathcal{A}_{m+k,n+l}$.

Естественная фильтрация в $\mathcal{A}$ по отношению к первой из градуировок

$$\mathcal{A}\supset\mathcal{A}^1_\bullet\supset\mathcal{A}^2_\bullet\supset\dots,\quad \mathcal{A}^m_n\equiv\bigoplus_{k\geq m}\mathcal{A}_{k,n} \tag{4.15}$$

определяет топологию и сходимость в пространстве бесконечных формальных рядов (4.13).

Определяя коммутатор двух однородных элементов $a\in\mathcal{A}_{m,q}, b\in\mathcal{A}_{k,l}$ выражением $[a,b]=a\circ b-(-1)^{ql}b\circ a$, и нильпотентный дифференциал $\delta:\mathcal{A}_{m,n}\to\mathcal{A}_{m-1,n+1}$ как

$$\delta a = dx^k\wedge\frac{\partial a}{\partial y^k},\quad \delta(\delta a)=0,\quad \forall a\in\mathcal{A}\,, \tag{4.16}$$

мы превращаем ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ в дифференциальную градуированную алгебру Ли по отношению к внешней степени. Легко заметить, что оператор δ может быть также переписан следующим образом

$$\delta a = -\frac{1}{i\hbar}[\omega_{ij}y^i dx^j, a], \tag{4.17}$$

и, следовательно, δ является также внутренним супер-дифференцированием исходной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$:

$$\delta(a\circ b) = (\delta a)\circ b + (-1)^n a\circ(\delta b),\quad \forall a\in\mathcal{A}_{\bullet,n},\ \forall b\in\mathcal{A}. \tag{4.18}$$

Нетривиальные когомологии оператора δ образуют пространство квантовых наблюдаемых $C^\infty(M)[[\hbar]]\subset\mathcal{A}$, чьи элементы “не содержат” y-в и dx-в. Для дополнительного подпространства можно построить оператор стягивающей гомотопии $\delta^{-1} : \mathcal{A}_{m,n} \to \mathcal{A}_{m+1,n-1}$

$$\delta^{-1} a = y^k i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \int\limits_0^1 a(x, ty, tdx, \hbar) \frac{dt}{t}, \tag{4.19}$$

где $i(\partial/\partial x^k)$ обозначает внутреннее дифференцирование внешних форм векторным полем $\partial/\partial x^k$.

Доопределяя оператор δ^{-1} на $C^\infty(M)[[\hbar]]$ нулём, мы получаем “разложение Ходжа-Де Рама”, имеющее место для любого $a \in \mathcal{A}$,

$$a = \sigma(a) + \delta\delta^{-1} a + \delta^{-1}\delta a\,, \tag{4.20}$$

где $\sigma(a) = a(x, 0, 0, \hbar)$ – проекция a на $C^\infty(M)[[\hbar]]$.

Симметричная связность ∇, сохраняющая структуру Λ ФВ-многообразия, позволяет построить ковариантную производную элементов алгебры $\mathcal{A}$. Мы будем обозначать эту производную тем же символом ∇

$$\nabla : \mathcal{A}_{n,m} \to \mathcal{A}_{n,m+1}, \quad \nabla = dx^i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - y^j \Gamma^k_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial y^k}\right), \tag{4.21}$$

где Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля связности ∇.

Из согласованности связности ∇ со структурой ФВ-многообразия Λ следует, что ковариантная производная дифференцирует $\circ-$умножение в $\mathcal{A}$

$$\nabla(a \circ b) = \nabla a \circ b + (-1)^n a \circ \nabla b, \quad \forall a \in \mathcal{A}_{\bullet,n}, \forall\ b \in \mathcal{A}. \tag{4.22}$$

Следующая лемма является непосредственным аналогом леммы 2.4 в [19]

Лемма 4.2.1 *Пусть ∇ – ковариантная производная в $\mathcal{A}$, тогда*

$$\nabla\delta a + \delta\nabla a = 0, \tag{4.23}$$

$$\nabla^2 a = \nabla(\nabla a) = \frac{1}{i\hbar}[\,R\,,\,a\,], \qquad R = \frac{1}{4} R_{ijkl} y^i y^j dx^k \wedge dx^l, \tag{4.24}$$

где $R_{ijkl} = \omega_{im} R^m_{\ jkl}$ – риманова кривизна связности ∇ .

Доказательство. Первое тождество является следствием того факта, что связность ∇ симметрична.

Далее из определения ковариантной производной (4.21) мы получаем

$$\nabla^2 a = -\frac{1}{2} dx^k \wedge dx^l R^j_{ikl} y^i \frac{\partial a}{\partial y^j}. \tag{4.25}$$

Таким образом, ∇^2 действует на элементы $\mathcal{A}$ алгебраически, то есть не дифференцирует по x. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[\,R\,, a] &= -\frac{1}{4}(R_{ijkl} y^i \Lambda^{jn} \frac{\partial a}{\partial y^n} - R_{ijkl} y^i \Lambda^{nj} \frac{\partial a}{\partial y^n}) dx^k \wedge dx^l + \\
&\quad + \frac{i\hbar}{8}(R_{ijkl} \Lambda^{jm} \Lambda^{in} \frac{\partial^2 a}{\partial y^m \partial y^n} - R_{ijkl} \Lambda^{mj} \Lambda^{ni} \frac{\partial^2 a}{\partial y^m \partial y^n}) dx^k \wedge dx^l = \\
&= -\frac{1}{2} dx^k \wedge dx^l R_{jikl} y^i \omega^{nj} \frac{\partial a}{\partial y^n} = \nabla^2 a.
\end{aligned}$$

В последнем из равенств мы использовали тождество Риччи, $g_{in} R^n_{jkl} = -g_{jn} R^n_{ikl}$, и его симплектический аналог $\omega_{im} R^m_{jkl} = \omega_{jm} R^m_{ikl}$ (см. например [67]).

Из доказанной леммы следует, что квадрат ковариантной производной ∇ является внутренним дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$. Этот факт оказывается очень важным для построения звёздочка-произведения в рамках метода Федосова.

Следуя Федосову, мы определяем следующее дифференцирование в алгебре $\mathcal{A}$

$$D = \nabla - \delta + \frac{1}{i\hbar}[r, \cdot] = \nabla + \frac{1}{i\hbar}[\omega_{ij} y^i dx^j + r, \cdot], \tag{4.26}$$

где $r = r_i(x, y, \hbar) dx^i$ принадлежит $\mathcal{A}^3_1$ и удовлетворяет нормализационному условию $r_i(x, 0, \hbar) dx^i = 0$. Простое вычисление даёт

$$D^2 a = \frac{1}{i\hbar}[\Omega, a], \quad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{4.27}$$

где

$$\Omega = R - \delta r + \nabla r + \frac{1}{i\hbar} r \circ r. \tag{4.28}$$

Связность (4.26) называется плоской если два-форма Ω не содержит y-в, то есть тогда и только тогда, когда Ω принадлежит центру алгебры $\mathcal{A}$. Следовательно, связность (4.26) автоматически окажется плоской, если

$$R - \delta r + \nabla r + \frac{1}{i\hbar} r \circ r = 0. \tag{4.29}$$

Очевидно, что ядерное подпространство плоской связности D всегда является подалгеброй в $\mathcal{A}$. Подалгеброй также является подпространство $\ker D \cap \mathcal{A}_{\bullet,0}$, которое мы будем обозначать $\mathcal{A}_D$.

Следующие две теоремы являются ключевыми при построении звёздочка-произведения. Их доказательства совершенно аналогичны доказательствам теорем 3.2 и 3.3 в [19].

Теорема 4.2.1 *Существует единственный элемент $r \in \mathcal{A}_1^3$, удовлетворяющий условию $\delta^{-1}r = 0$ и уравнению (4.29).*

Теорема 4.2.2 *Для любой наблюдаемой $a \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ существует единственный элемент $\widetilde{a} \in \mathcal{A}_D$, такой что $\sigma(\widetilde{a}) = a$.*

В качестве следствия последнего утверждения мы получаем, что проекция σ устанавливает изоморфизм линейных пространств $\mathcal{A}_D$ и $C^\infty(M)[[\hbar]]$, а также

Следствие 4.2.1 *Пулл-бэк $\circ$-произведения при отображении σ^{-1} индуцирует ассоциативное звёздочка-произведение на пространстве физических наблюдаемых $C^\infty(M)[[\hbar]]$, а именно*

$$a * b = \sigma(\sigma^{-1}(a) \circ \sigma^{-1}(b)) \tag{4.30}$$

Помимо простого факта существования, в доказательствах приведённых здесь теорем содержится эффективная процедура построения отображения поднятия σ^{-1}. Данная процедура осуществляется путём итерирования следующей пары связанных уравнений

$$\begin{gathered} r = \delta^{-1}(R + \nabla r + \frac{1}{i\hbar} r \circ r), \\ \sigma^{-1}(a) = a + \delta^{-1}(\nabla\sigma^{-1}(a) + \frac{1}{i\hbar}[r, \sigma^{-1}(a)]). \end{gathered} \tag{4.31}$$

Поскольку оператор ∇ сохраняет фильтрацию, а δ^{-1} повышает её на 1, итерационная процедура (4.31) сходится в смысле топологии (4.15) и определяет единственное решение для $\sigma^{-1}(a)$. Таким образом, звёздочка-произведение двух функций может быть вычислено с любой наперёд заданной точностью по $\hbar$.

Отметим, что для анти-эрмитовой ФВ-структуры Λ (случай кэлерова многообразия) введённое произведение удовлетворяет следующему свойству вещественности:

$$\overline{a * b} = \overline{b} * \overline{a}, \qquad \forall a, b \in C^\infty(M)[[\hbar]]. \tag{4.32}$$

В частности, формальные ряды по $\hbar$ с коэффициентами в вещественно-значных гладких функциях образуют замкнутую подалгебру Ли по отношению к

$*$-коммутатору, умноженному на $\sqrt{-1}$. В стандартной квантово-механической интерпретации данная подалгебра понимается как алгебра физических наблюдаемых, соответствующая алгебре самосопряжённых операторов.

Формула (4.32) тривиально следует из аналогичного соотношения для $\circ-$произведения

$$\overline{a \circ b} = (-1)^{mn} \overline{b} \circ \overline{a}, \qquad \forall a \in \mathcal{A}_{\bullet,m},\ b \in \mathcal{A}_{\bullet,n}, \tag{4.33}$$

и из структуры уравнений (4.30) и (4.31).

Замечание. Как легко видеть, ранговое условие, наложенное на Λ в определении 4.1.1, является несущественным для построения ассоциативного звёздочка-произведения (4.10). Единственное условие, которое использовано при построении, – это существование симметричной связности, согласованной с Λ.

Таким образом, вышеприведённая конструкция может быть применена и в более общей ситуации, включающей в себя случай вырожденного тензора g^{ij}. Исходной конструкции Федосова, например, отвечает случай нулевого симметричного тензора $g^{ij} = 0$. Было бы интересно сформулировать необходимые и достаточные условия для существования симметричной связности, согласованной с данным тензором $\Lambda^{ij} = \omega^{ij} + g^{ij}$, и описать все такие связности.

В заключении этого раздела мы введем следовой функционал на алгебре квантовых наблюдаемых.

Пусть $C_0^\infty(M)[[\hbar]]$ – идеал в $C^\infty(M)[[\hbar]]$, состоящий из квантовых наблюдаемых с компактным носителем. Напомним, что линейный функционал на $C_0^\infty(M)[[\hbar]]$ со значениями в формальных числах $\mathbf{C}[[\hbar]]$ называется следом, если он обнуляется на любом коммутаторе[1], то есть

$$tr(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k c_k, \qquad c_k \in \mathbf{C}, \tag{4.34}$$

и

$$tr(a * b) = tr(b * a). \tag{4.35}$$

Пусть $d\mu = d\mu_0 + \hbar d\mu_1 + \dots$ – формальная гладкая мера на M, тогда интегрирование по $d\mu$ определяет непрерывный функционал следующего вида $C_0^\infty(M)[[\hbar]] \ni a \to \int_M a \cdot d\mu$. Формальная мера называется следовой мерой для звёздочка-произведения, если функционал $\int_M a \cdot d\mu$ является следом. В работе Неста и Цыгана

[1] Наше определение отличается от стандартного отсутствием несущественного нормализационного множителя $1/(2\pi\hbar)^n$.

[54] доказано, что любой непрерывный следный функционал определяется следовой мерой. Для ФВ-многообразий верно также следующее утверждение.

Теорема 4.2.3 *На ФВ-многообразии существует следовая мера, ассоциированная с алгеброй квантовых наблюдаемых $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Данная мера имеет следующий вид*

$$d\mu = (1 + \hbar t_1(x) + \hbar^2 t_2(x) + \ldots) \cdot \Omega, \tag{4.36}$$

где $\Omega = \omega^n/n! = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$ – симплектический (риманов) объём, а коэффициенты $t_a(x)$ являются полиномами тензора кривизны R_{ijkl} и его ковариантных производных.

Доказательство. Данное утверждение является аналогом теоремы 5.6.6 в [21] и может быть доказано с использованием того же самого принципа локализации. Кроме того, в следующем разделе мы приведём явную форму оператора, устанавливающего локальный изоморфизм деформационного квантования ФВ-многообразий и федосовского квантования соответствующей симплектической структуры (M, ω). Используя этот локальный изоморфизм мы может вывести следовую меру (4.36) из следовой меры Федосова на (M, ω).

4.3 Критерий эквивалентности звездочка-произведений.

Геометрия ФВ-многообразий позволяет применять по крайней мере две различные схемы квантований, а именно, квантование Федосова, которое использует только антисимметричную часть формы Λ, и деформационное квантование, вовлекающее в выражение для звёздочка-произведения всю форму Λ (4.10). По тем причинам, которые были упомянуты во Введении, мы будем ссылаться на эти квантования как на вейлевское и виковское, соответственно. Естественный вопрос состоит в том, являются ли эти квантования эквивалентными.

Как известно, в общем случае любые два звёздочка-произведения на симплектическом многообразии являются локально эквивалентными, а препятствие к глобальной эквивалентности звёздочка-произведений может быть идентифицировано с элементом вторых когомологий Де Рама данного симплектического многообразия. В этом разделе мы явно построим оператор, осуществляющий локальную эквивалентность вейлевского и виковского умножения, а также предъявим 2-форму, которая представляет когомологический класс, являющийся препятствием при построении глобальной эквивалентности.

Для того, чтобы различать виковское звёздочка-произведение от вейлевского, мы будем использовать индекс g всех конструкций, связанных с первым из произведений (данный индекс будет указывать на ненулевую симметричную часть g формы Λ). В частности, во всём этом разделе послойное произведение (4.14) будет обозначаться символом $\circ_g$, в то время как $\circ$ будет обозначать федосовское послойное умножение [19], которое получается из (4.14) полаганием $g = 0$.

Прежде всего заметим, что послойные произведения $\circ$ и $\circ_g$ оказываются эквивалентными в следующем смысле:

Лемма 4.3.1 *Для любых $a, b \in \mathcal{A}$ мы имеем*

$$G(a \circ_g b) = (G\, a \circ G\, b), \tag{4.37}$$

где формально обратимый оператор G определяется выражением

$$G = \exp(-\frac{i\hbar}{4} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j}). \tag{4.38}$$

Другими словами отображение $G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, рассматриваемое как автоморфизм линейного пространства, устанавливает изоморфизм алгебр $(\mathcal{A}, \circ)$ и $(\mathcal{A}, \circ_g)$.

Очевидное доказательство осуществляется прямой подстановкой (4.38) в уравнение (4.37).

Оператор G удовлетворяет следующим простым свойствам:

$$\nabla G = G \nabla, \qquad \delta G = G \delta. \tag{4.39}$$

Автоморфизм G определяет новую плоскую связность $\tilde{D} = G D_g G^{-1}$, которая в силу свойств (4.37) и (4.39) может быть переписана как

$$\tilde{D} = \nabla - \delta + \frac{1}{i\hbar}[\widetilde{r}, \cdot], \qquad \widetilde{r} = G r_g, \tag{4.40}$$

где $[\ ,\ ]$ обозначают $\circ-$коммутатор. Элементы $\widetilde{r}$ и r удовлетворяют уравнениям

$$GR + \nabla \widetilde{r} - \delta \widetilde{r} + \frac{1}{i\hbar} \widetilde{r} \circ \widetilde{r} = 0, \tag{4.41}$$

$$R + \nabla r - \delta r + \frac{1}{i\hbar} r \circ r = 0. \tag{4.42}$$

Таким образом мы имеем два звёздочка-произведения $*$ и $\widetilde{*}$, отвечающих паре плоских связностей D и $\widetilde{D}$. Поскольку в общем случае $D \neq \widetilde{D}$, то эквивалентность $\circ$ и $\circ_g$-произведений (а стало быть и эквивалентность между произведениями $\widetilde{*}$ и $*_g$) не влечёт автоматическое равенство $* = \widetilde{*}$. Действительно, вычисляя низшие порядки по $\hbar$ мы получаем

$$
\begin{aligned}
a * b &= ab + \frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\nabla_i a \nabla_j b - \frac{\hbar^2}{8}\omega^{ik}\omega^{jl}\nabla_i\nabla_j a \nabla_k\nabla_l b + \mathcal{O}(\hbar^3), \\
a \widetilde{*} b &= ab + \frac{i\hbar}{2}\widetilde{\omega}^{ij}\nabla_i a \nabla_j b - \frac{\hbar^2}{8}\omega^{ik}\omega^{jl}\nabla_i\nabla_j a \nabla_k\nabla_l b + \mathcal{O}(\hbar^3),
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

где

$$
\widetilde{\omega}^{ij} = \omega^{ij} + \hbar\omega_1^{ij}, \tag{4.44}
$$

и

$$
\omega_1^{ij} = \omega^{ik}\Omega_{kl}\omega^{lj}, \quad \Omega = \frac{i}{\hbar}(GR - R) = \frac{1}{8}R_{ijkl}g^{ij}dx^k \wedge dx^l. \tag{4.45}
$$

Два-форма Ω замкнута в силу тождества Бьянки для тензора кривизны. Таким образом соотношения (4.43), (4.44) говорят о том, что второе звёздочка-произведение $\widetilde{*}$ является так называемой однодифференциальной деформацией первого $*$ [52]. Как известно, данная деформация является тривиальной тогда и только тогда, когда замкнутая два-форма Ω точна [52], [89].

Предположим теперь, что форма Ω точна, и попытаемся установить эквивалентность $*$ и $\widetilde{*}$ с помощью послойного сопряжения.

$$
a \to U \circ a \circ U^{-1}, \tag{4.46}
$$

где U – обратимый элемент $\mathcal{A}_{\bullet,0}$. Выберем элемент U таким образом, чтобы при действии преобразования (4.46) D переходило бы в $\tilde{D}$, то есть

$$
D(U \circ a \circ U^{-1}) = U \circ (\tilde{D}a) \circ U^{-1}, \quad \forall a \in \mathcal{A},
$$

или

$$
[U^{-1} \circ DU, a] = \frac{1}{i\hbar}[\Delta r,\, a], \tag{4.47}
$$

где $\Delta r = \widetilde{r} - r$.

Последнее условие означает, что

$$
U^{-1} \circ DU = \frac{1}{i\hbar}\Delta r + \frac{1}{i\hbar}\psi, \tag{4.48}
$$

где $\psi \in \mathcal{A}_{\bullet,1}$ является центральным элементом алгебры $\mathcal{A}$. Другими словами ψ является формальным рядом по $\hbar$ со значениями в один-формах на M. Условие согласованности уравнения (4.47), следующее из соотношения $D^2 = 0$ имеет вид

$$D\Delta r + \frac{1}{i\hbar}\Delta r \circ \Delta r + d\psi = 0. \tag{4.49}$$

Аналогичное соотношение можно получить вычитанием (4.41) из (4.42)

$$D\Delta r + \frac{1}{i\hbar}\Delta r \circ \Delta r + \Omega = 0. \tag{4.50}$$

Таким образом, уравнение (4.47) оказывается согласованным в том и только в том случае, если форма Ω точна.

Перепишем теперь (4.48) в следующей форме

$$\delta U = \nabla U + \frac{1}{i\hbar}[r, U] - \frac{1}{i\hbar}U \circ (\Delta r + \psi) \tag{4.51}$$

и применим оператор δ^{-1} к обоим частям уравнения. Используя разложение Ходжа-Де Рама (4.20) и полагая $\sigma(U) = 1$, мы получаем

$$U = 1 + \delta^{-1}(\nabla U + \frac{1}{i\hbar}[r, U] - \frac{1}{i\hbar}U \circ (\Delta r + \psi)). \tag{4.52}$$

В [19, Теорема 4.3] доказано, что итерирование последнего уравнения (4.52) даёт решение уравнения (4.51), в том случае если условие согласования (4.49) выполнено.

Данное решение (4.52) определяет обратимый элемент $\mathcal{A}_{\bullet,0}$, поскольку оно начинается с 1 . Тогда искомое преобразование эквивалентности $T : (C^\infty(M), *) \to (C^\infty(M), *_g)$ определяется следующей последовательностью отображений

$$Ta(x) = (U \circ G(\sigma_g^{-1}(a)) \circ U^{-1})|_{y=0}, \tag{4.53}$$

то есть

$$T(a *_g b) = (Ta * Tb).$$

Основные результаты данного раздела мы сформулируем в виде следующей теоремы

Теорема 4.3.1 *Препятствие к эквивалентности вейлевского и виковского произведений лежит во вторых когомологиях Де Рама $H^2(M)$. Вейлевское квантование эквивалентно виковскому тогда и только тогда, когда два-форма $R_{ijkl}g^{ij}dx^k \wedge dx^l$ точна.*

Замечание 1. Поскольку любая замкнутая форма локально точна, то оператор (4.53), построенный по локальной один-форме ψ, является оператором, осуществляющим локальную эквивалентность вейлевского и виковского произведений.

Замечание 2. В том случае, когда ФВ-структура является кэлеровой (случай анти-эрмитовой Λ), два-форма Ω является ни чем иным как формой Риччи данного кэлерова многообразия $(M, \sqrt{-1}\Lambda)$. В этом случае когомологический класс Ω оказывается пропорциональным первому классу Черна $c_1(M)$, который, как известно, зависит только от выбора комплексной структуры [90] и равен нулю тогда и только тогда, когда соответствующее кэлерово многообразие является эйнштейновым. Эйнштейновы кэлеровы многообразия носят специальное название, они называются многообразиями Калаби-Яу. Таким образом, утверждение теоремы 4.3.1 для случая кэлеровых многообразий можно переформулировать следующим образом. *Вейлевское квантование на кэлеровом многообразии эквивалентно виковскому тогда и только тогда, когда данное кэлерово многообразие является многообразием Калаби-Яу.*

Глава 5

Получение универсальной деформационной формулы методом Федосова.

В этой главе предложена простая процедура квантования нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с классическими треугольными r-матрицами. Как мы увидим, данная процедура даёт универсальное квантование этих скобок, и потому позволяет проквантовать биалгебру Ли, ассоциированную с заданной треугольной r-матрицей.

5.1 Квантование скобок Пуассона, ассоциированных с треугольными r-матрицами.

Пусть $\mathcal{G}$ квази-фробениусова алгебра Ли со следующими коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k \,, \quad i, j, k = 1, ..., m \,, \tag{5.1}$$

и, пусть $r = r^{ij} e_i \wedge e_j \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ – соответствующая невырожденная треугольная r-матрица этой алгебры Ли.

Пусть

$$c = ||r_{ij}|| \qquad r_{ik} r^{kj} = \delta_i^j$$

– матрица обратная к r. Как отмечалось во Введении, классическое уравнение

Янга-Бакстера (1.12) на r^{ij} эквивалентно условию коцикла на обратную матрицу $||r_{ij}||$

$$f^l_{ij} r_{lk} + \text{циклические перестановки по } (i,j,k) = 0. \tag{5.2}$$

Другими словами $||r_{ij}||$ определяет центральное расширение $\mathcal{G}_c$ алгебры $\mathcal{G}$ со следующей скобкой Ли

$$[e_i, e_j] = f^k_{ij} e_k + r_{ij}. \tag{5.3}$$

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие с заданными на нём векторными полями X_i, удовлетворяющими коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathcal{G}$

$$[X_i, X_j] = f^k_{ij} X_k\,. \tag{5.4}$$

Тогда многообразие $\mathcal{M}$ естественным образом оснащается следующей пуассоновой структурой

$$\{a, b\} = r^{ij} X_i a X_j b\,, \qquad \forall a, b \in C^\infty(\mathcal{M}), \tag{5.5}$$

специальное квантование которой и приведёт нас к универсальному твистующему элементу.

Процедура построения звёздочка-произведения для скобки Пуассона (5.5) как и предыдущая конструкция основывается на идеях квантовой редукции. Как и ранее мы следуем стандартной схеме. Во-первых, мы определяем "расширенную" ассоциативную (но некоммутативную) алгебру $\mathbf{A}$, которая включает в себя алгебру функций $C^\infty(\mathcal{M})$ в качестве коммутативной подалгебры. Во-вторых, мы задаём уравнения квантовой редукции, выделяющие в алгебре $\mathbf{A}$ некоторую (некоммутативную) подалгебру $\mathbf{A}_D$, которая, в свою очередь, оказывается изоморфной алгебре функций $C^\infty(\mathcal{M})$ как линейное пространство. Наконец, некоммутативное произведение, индуцированное из $\mathbf{A}$ при помощи вышеупомянутого изоморфизма, оказывается искомым звёздочка-произведением.

Пусть $U(\mathcal{G}_c)$ – алгебра с единицей, порождённая элементами y_i, которые в свою очередь подчинены следующим коммутационным соотношениям

$$[y_i, y_j] = \hbar f^k_{ij} y_k - \hbar r_{ij}, \tag{5.6}$$

где $\hbar$ – формальный параметр.

Алгебра $\mathbf{A}$, используемая в нашей конструкции, является некоммутативной, ассоциативной алгеброй гладких функций на $\mathcal{M}$ со значениями в $U(\mathcal{G}_c)$. Очевидно, что алгебра числовых функций $C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ вложена в $\mathbf{A}$ как коммутативная подалгебра.

Выбирая базис симметричных мономов в $U(\mathcal{G}_c)$, мы определяем взаимнооднозначное соответствие между алгеброй $\mathbf{A}$ и линейным пространством гладких функций на $\mathcal{M}$ со значениями в формальных рядах по коммутирующим переменным y_i и $\hbar$

$$\hat{a} \in \mathbf{A} \mapsto a = \sum_{k,m=0}^{\infty} \hbar^k a_k^{i_1 \dots i_m} y_{i_1} \dots y_{i_m}, \tag{5.7}$$

где коэффициентные функции $a_k^{i_1 \dots i_m} \in C^\infty(\mathcal{M})$ симметричны по индексам $i_1, \dots i_m$.

В дальнейшем, мы негласно отождествляем элементы алгебры $\mathbf{A}$ с соответствующими им символами и обозначаем произведение и коммутатор символов a и b как $a \bullet b$ и $[a, b]$, соответственно. Явная формула для $\bullet$-произведения символов a и b имеет следующий вид[1]

$$(a \bullet b)(y) = a(\hat{L})b(y)\,, \qquad \hat{L}_i = \left(y_j - \frac{\hbar}{2} r_{jn} \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \mathcal{R}_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\,, \tag{5.8}$$

где

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} \Lambda^m(x) = \left(\frac{e^{\Lambda(x)} - 1}{\Lambda(x)}\right)^{-1}\,, \qquad \Lambda_j^i(x) = \hbar x^k f_{kj}^i\,, \tag{5.9}$$

а b_m являются числами Бернулли.

Отображение символов (5.7) позволяет определить естественную проекцию π из $\mathbf{A}$ в $C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$

$$\pi(a) = a|_{y=0}. \tag{5.10}$$

Введём следующие дифференцирования алгебры $\mathbf{A}$

$$D_i a = X_i a + \frac{1}{\hbar}[y_i, a]\,, \quad [D_i, D_j] = f_{ij}^k D_k, \tag{5.11}$$

$$D_i(a \bullet b) = (D_i a) \bullet b + a \bullet (D_i) b,$$

и определим подалгебру $\mathbf{A}_D$ D-постоянных элементов $\mathbf{A}$: $D_i a = 0$.

[1]Для более подробного описания операторного исчисления и, в частности, вейлевского исчисления на алгебрах Ли см. [91].

Следующее предложение является ключевым в построении искомого звёздочка-произведения

Предложение 5.1.1 *Любой D-постоянный элемент $a \in \mathbf{A}_D$ однозначно определяется своей проекцией $\pi(a) \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$, и, наоборот, по любой функции $b \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ можно однозначно восстановить элемент $\tilde{b} \in \mathbf{A}_D$ такой, что $\pi(\tilde{b}) = b$*

Доказательство. Представим элемент a в виде ряда $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)}$ из мономов по переменным y, $a_{(n)} = a_{(n)}^{i_1,\ldots,i_n} y_{i_1} \cdots y_{i_n}$.

Тогда уравнение $D_i a = 0$ примет вид

$$\frac{\partial a_{(n+1)}}{\partial y_j} = r^{ji} \left(X_i a_{(n)} + y_k f_{im}^k \frac{\partial a_{(n)}}{\partial y_m} \right), \tag{5.12}$$

или

$$\partial_i a_{(n+1)} = V_i a_{(n)}\,, \tag{5.13}$$

где

$$\partial_i = r_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}\,, \qquad V_i = X_i + y_k f_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_j}\,. \tag{5.14}$$

Условия согласованности для уравнений (5.13) имеют следующий вид

$$\partial_i (V_j a_{(n)}) - \partial_j (V_i a_{(n)}) = 0. \tag{5.15}$$

Докажем требуемое утверждение по индукции. Для $n = 0$ уравнения (5.13), очевидно, согласованы и мы имеем

$$a_{(1)} = y_i r^{ij} X_j a_{(0)}\,, \qquad a_{(0)} \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]\,. \tag{5.16}$$

Предположим теперь, что мы можем найти все $a_{(k)}$ с $k = 1, 2, ..., n$. Тогда уравнения на $a_{(n+1)}$ согласованы при условии, что выполнено (5.15).

Используя тождества

$$[\partial_i, V_j]a - [\partial_j, V_i]a = f_{ij}^k \partial_k a\,, \quad \forall\ a \in \mathbf{A}, \qquad [V_i, V_j] = f_{ij}^k V_k\,, \tag{5.17}$$

мы можем переписать

$$\partial_i (V_j a_{(n)}) - \partial_j (V_i a_{(n)}) = f_{ij}^k \partial_k a_{(n)} - (V_i \partial_j - V_j \partial_i) a_{(n)}. \tag{5.18}$$

Поскольку $\partial_i a_{(n)} = V_i a_{(n-1)}$, то

$$f_{ij}^k \partial_k a_{(n)} - [V_i, V_j] a_{(n-1)} = f_{ij}^k (\partial_k a_{(n)} - V_k a_{(n-1)}) = 0\,. \tag{5.19}$$

Таким образом, предложение доказано.

Заметим, что в действительности представленное доказательство существования D-постоянного элемента для любой функции $a \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ является конструктивным, а именно, мономы $a_{(n)}$, определяющие подъём функции a, можно находить последовательно при помощи следующей рекуррентной формулы

$$a_{(n+1)}(y) = \int_0^1 y_j r^{ji} \left(X_i a_{(n)}(ty) + y_k f_{im}^k \frac{\partial a_{(n)}(ty)}{\partial y_j} \right) dt. \tag{5.20}$$

Так, например, с точностью до второго порядка по y подъём функции $a \in C^\infty(\mathcal{M})$ имеет вид

$$\tilde{a} = a + y^i X_i a + \frac{1}{2}(y^i y^j X_i X_j a - y_j y^i f_{in}^j X^n a) + \cdots\,, \tag{5.21}$$
$$y^i = y_j r^{ji}\,, \quad X^i = X_j r^{ji}\,.$$

Таким образом, $\bullet$-произведение в $\mathbf{A}$ индуцирует ассоциативное звёздочка-произведение на многообразии $\mathcal{M}$:

$$a * b = \pi(\tilde{a} \bullet \tilde{b})\,, \tag{5.22}$$

где $\tilde{a}$ обозначает подъём $a \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$.

Поскольку процедура подъёма (5.20) не меняет постоянные функции, то функция $f \equiv 1$ является единицей в алгебре $(C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]], *)$

$$a * 1 = 1 * a = a \qquad \forall a \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]\,. \tag{5.23}$$

Вычисление (5.22) с точностью до первого порядка по $\hbar$

$$a * b = ab + \frac{\hbar}{2}\{a, b\} \;\; mod\; \hbar^2, \qquad a, b \in C^\infty(\mathcal{M}) \tag{5.24}$$

показывает, что полученное произведение удовлетворяет условию квази-классического предела, и, следовательно, (5.22) является звёздочка-произведением для скобки Пуассона (5.5).

Заметим, что благодаря специальной структуре D-постоянных элементов (5.20) звёздочка-произведение (5.22) может быть переписано в следующей форме

$$a * b = ab + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \hbar^n F_n^{i_1 \ldots i_m | \, j_1 \ldots j_k} (X_{i_1} \ldots X_{i_m} a)(X_{j_1} \ldots X_{j_k} b), \quad a, b \in C^{\infty}(\mathcal{M}), \tag{5.25}$$

где $F_n^{i_1 \ldots i_m | \, j_1 \ldots j_k}$ – постоянные тензоры, по отдельности симметричные по индексам $i_1 \ldots i_m$ и $j_1 \ldots j_k$, а X_i действуют последовательно как дифференциальные операторы первого порядка.

Таким образом, формула (5.25) оказывается универсальной в вышеупомянутом смысле, и, следовательно, определяет универсальный твистующий элемент $F \in \mathcal{U}(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{G})[[\hbar]]$

$$F = I \otimes I + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \hbar^n F_n^{i_1 \ldots i_m | \, j_1 \ldots j_k} e_{i_1} \ldots e_{i_m} \otimes e_{j_1} \ldots e_{j_k}, \tag{5.26}$$

удовлетворяющий следующим условиям

$$\begin{gathered} ((\Delta \otimes I) \, F) \; (F \otimes I) = ((I \otimes \Delta) \, F) \; (I \otimes F) \; , \\ (\varepsilon \otimes I) F = (I \otimes \varepsilon) F = I \; , \end{gathered} \tag{5.27}$$

$$F = I \otimes I + \frac{\hbar}{2} r^{ij} e_i \otimes e_j \;\; mod \;\; (\hbar^2) \; . \tag{5.28}$$

где I – единичный элемент в $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, а Δ и ε обозначают стандартное коумножение и стандартную коединицу в $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ соответственно

$$\begin{gathered} \Delta e_i = e_i \otimes I + I \otimes e_i, \qquad \Delta I = I, \\ \varepsilon e_i = 0, \qquad \varepsilon I = 1. \end{gathered} \tag{5.29}$$

Первые два условия (5.27) эквивалентны условию ассоциативности звёздочка-произведения (5.25) и условию (5.23), в то время как уравнение (5.28) попросту выражает условие квази-классического предела (5.24).

Как упоминалось во введение, задание твистующего элемента, решает проблему квантования биалгебры Ли, заданной треугольной r-матрицей $r = r^{ij} e_i \wedge e_j$ в смысле теории квантовых групп [70], [74].

Следует отметить, что в приведённой конструкции звёздочка-произведения мы могли бы использовать формальный ряд

$$C_{ij} = r_{ij} + \hbar c_{ij}^{(1)} + \hbar^2 c_{ij}^{(2)} + \ldots$$

со значениями в 2-коциклах алгебры $\mathcal{G}$ вместо r_{ij}, определяя центральное расширение (5.6).

В результате мы получили бы другое звёздочка-произведение вида (5.25) и, следовательно, другой твистующий элемент, соответствующий той же самой классической r-матрице. В следующем параграфе мы дадим простое доказательство необходимого и достаточного условия того, что соответствующие звёздочка-произведения (твистующие элементы) являются эквивалентными.

5.2 Теорема Эквивалентности

Следуя Дринфельду [70], два звёздочка-произведения $*$ и $*'$ вида (5.25) определяют эквивалентные твистующие элементы, если существует линейный оператор

$$P : C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]] \mapsto C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]], \tag{5.30}$$

сплетающий эти произведения

$$P(a * b) = Pa *' Pb. \tag{5.31}$$

При этом оператор P определяется как формальный ряд по $\hbar$

$$P = Id + \hbar P_1 + \hbar^2 P_2 + \ \dots, \tag{5.32}$$

где P_1, P_2, $\dots$ являются дифференциальными операторами следующего вида

$$P_m = \sum_k P_m^{i_1,\dots,i_k} X_{i_1} \dots X_{i_k}, \qquad P_m^{i_1,\dots,i_k} \in \mathbf{C}, \tag{5.33}$$

векторные поля X_i действуют последовательно как дифференциальные операторы первого порядка, а коэффициенты $P_m^{i_1,\dots,i_k}$ являются симметричными по индексам $i_1, \dots, i_k$.

В работе Дринфельда [70] была сформулирована теорема о том, что неэквивалентные твистующие элементы классифицируются формальными рядами по $\hbar$ со значениями во вторых когомологиях алгебры Ли. Однако доказательство этой теоремы не было приведено ни в работе [70], ни в одной из последующих работ. Здесь мы приводим простое доказательство классификационной теоремы для твистующих элементов, полученных в рамках нашей процедуры.

Теорема 5.2.1 (Дринфельд [70]) *Звёздочка-произведения $*$ и $*'$ вида (5.25), соответствующие коциклам C и C', задают эквивалентные твистующие элементы тогда и только тогда, когда*

- $C = C' \mod \hbar$,
- *коцикл* $C - C'$ *тривиален.*

Доказательство. Необходимость вышеупомянутых условий доказывается стандартными методами деформационного квантования, основанными на рассмотрении когомологий Хохшильда. Поэтому мы опустим эту часть доказательства и перейдём к достаточности.

В силу условия теоремы мы имеем тривиальный коцикл

$$C'_{ij} - C_{ij} = f_{ij}^k \xi_k, \tag{5.34}$$

где ξ_i – формальный ряд по $\hbar$

$$\xi_i = \hbar\xi_i^{(1)} + \hbar^2\xi_i^{(2)} + \ \dots . \tag{5.35}$$

Тогда алгебры $C^\infty(\mathcal{M}) \otimes U(\mathcal{G}_C)$ и $C^\infty(\mathcal{M}) \otimes U(\mathcal{G}_{C'})$ изоморфны и изоморфизм из первой алгебры во вторую можно задать на генераторах следующим образом

$$y_i \mapsto \bar{y}_i = y_i - \xi. \tag{5.36}$$

Для наших целей оказывается более удобно определить отображение (5.36) на соответствующих символах. Поскольку ξ является коммутирующей переменной, отображение (5.36) может быть переписано в следующем виде

$$Qa(\hbar, y) = a(\hbar, y - \xi). \tag{5.37}$$

Легко видеть, что Q переводит D^C-постоянные элементы в элементы, которые постоянны относительно $D^{C'}$, где D_i^C означает

$$D_i^C = X_i + \frac{1}{\hbar}[y_i, \cdot\,]_C, \tag{5.38}$$

а

$$[a, b]_C = a \bullet_C b - b \bullet_C a.$$

Следовательно, если $\tilde{a}$ – подъём функции a по отношению к дифференцированиям (5.38), то $Q\tilde{a}$ является подъёмом той же функции, но по отношению к $D_i^{C'}$, откуда следует, что оператор

$$Pa = \pi Q\tilde{a} \tag{5.39}$$

сплетает звёздочка-произведения $*$ и $*'$ (5.31).

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что предъявленная теорема является нединамическим аналогом классификационного утверждения, сделанного в работе П. Шу [76].

5.3 Квантование простейшей неабелевой алгебры Ли.

Простейшим примером фробениусовой алгебры Ли является двумерная борелева алгебра B со следующей скобкой Ли

$$[H, E] = E\,. \tag{5.40}$$

Коприсоединённое действие алгебры B на дуальном пространстве B^* сгенерировано парой линейных векторных полей[2]

$$H = y\partial_y\,, \qquad E = y\partial_x\,, \tag{5.41}$$

где (x, y) – декартовы координаты на $B^* \sim \mathbf{R}^2$.

Векторные поля (5.41) определяют квадратичную скобку на $\mathbf{R}^2$

$$\omega = E \wedge H = y^2\partial_x \wedge \partial_y\,. \tag{5.42}$$

В принципе, данная скобка может быть проквантована с помощью предложенной нами итерационной процедурой. Однако, в этом случае существует более простой путь получения звёздочка-произведения требуемого вида (5.25). А именно, заметим, что вышеупомянутый пуассонов бивектор (5.42) может быть переписан в виде внешнего произведения следующих векторных полей:

[2]Легко видеть, что пространство B^* представляет собой дизъюнктное объединение двух коприсоединённых орбит размерностей 0 и 2. Первая из орбит состоит из единственной точки – начала координат $0 \in B^*$, а вторая устроена как $B^* - \{0\} \sim S^1 \times \mathbf{R}^1$. Существование открытой коприсоединённой орбиты является общим свойством для всех фробениусовых алгебр Ли [71].

$$X = \partial_x\,, \qquad Y = y^2\partial_y\,, \tag{5.43}$$

так что

$$\omega = X\wedge Y\,, \qquad [X,Y]=0\,.$$

Поскольку векторные поля (5.43) коммутируют, скобка Пуассона (5.42) может быть проквантована при помощи простого аналога формулы Вейля-Мойяла

$$f*g=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n\frac{1}{n!}(X^nf)(Y^ng). \tag{5.44}$$

С другой стороны легко доказать по индукции, что

$$(y^2\partial)^n = y^n\prod_{k=0}^{n-1}(y\partial_y+k). \tag{5.45}$$

Используя данное тождество, мы можем переписать звёздочка-произведение (5.44) в терминах исходных (некоммутирующих) векторных полей (5.41)

$$f*g=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n\frac{1}{n!}(E^nf)(H^{(n)}g)\,, \tag{5.46}$$

где мы определили

$$H^{(n)}=H(H+1)\cdots(H+n-1)\,.$$

Выражение (5.46) определяет ассоциативное звёздочка-произведение для любой пары векторных полей E и H, реализующих соотношения борелевой алгебры (5.40) и, следовательно, задаёт искомый твистующий элемент (5.26). Последнее легко видеть из следующей цепочки рассуждений. Векторные поля (5.41) индуцируют специальное представление $\rho:\mathcal{U}(B)\to D(\mathbf{R}^2)$ универсальной обертывающей $\mathcal{U}(B)$ в алгебре дифференциальных операторов на плоскости $D(\mathbf{R}^2)$. Поскольку E и H линейно независимы в общей точке, то это представление точно, то есть $\ker\rho=0$ [3]. Другими словами, не существует никаких алгебраических соотношений между операторами первого порядка E и H кроме соотношения (5.40) и его следствий. Таким образом, ассоциативность имеет место для любого представления $\rho: B\to \mathrm{Vect}(\mathbf{R}^2)$.

Заметим, что впервые универсальный твистующий элемент (5.46) для борелевой алгебры (5.40) был получен в работе [92].

[3]Очевидно, что это свойство справедливо для дуального пространства любой фробениусовой алгебры Ли в силу существования ко-орбиты максимальной размерности.

Формула (5.46) позволяет проквантовать интересный класс так называемых квази-однородных скобок на $\mathbf{R}^2$.

Любая скобка на плоскости задаётся единственной функцией f

$$\omega = f(x,y)\partial_x \wedge \partial_y. \tag{5.47}$$

Она называется квази-однородной скобкой веса λ при том, что веса по x и y равны соответственно α и β, если задающая её функция f является собственным вектором для оператора Эйлера $v = \alpha x\partial_x + \beta y\partial_y$ с собственным значением λ,

$$vf = \lambda f\,. \tag{5.48}$$

В дальнейшем, мы предполагаем, что $\lambda \neq 0$.

Если ввести векторное поле u

$$u = \partial_x f\partial_y - \partial_y f\partial_x, \tag{5.49}$$

то легко видеть, что

$$\omega = \frac{v \wedge u}{\lambda}, \qquad [v,u] = (\lambda - \alpha - \beta)u. \tag{5.50}$$

Если $\alpha + \beta = \lambda$, то бивектор (5.47) представим в виде внешнего произведения коммутирующих векторных полей u и v, и в противном случае, если $\alpha + \beta \neq \lambda$, векторные поля u и v образуют (после очевидного переопределения) борелеву алгебру (5.40). Таким образом, всякая квази-однородная скобка Пуассона может быть проквантована чисто алгебраически с помощь формулы (5.44) или (5.46).

Например, пусть (m,n,k,l) – целые числа, тогда функция

$$f = x^m y^n + x^k y^l \tag{5.51}$$

задаёт квази-однородную скобку веса $\lambda = nk - lm$ с $\alpha = n - l$ и $\beta = k - m$. И наоборот, если заданы целые веса λ, α, β, то самая общая, аналитическая в нуле, функция f, определяющая квази-однородную скобку с соответствующими весами, имеет вид

$$f(x,y) = \sum_k a_k x^{n_k} y^{m_k}\,, \tag{5.52}$$

где a_k – произвольные константы, а суммирование ведётся по всем неотрицательным целым решениям (n_k, m_k) линейного Диофантова уравнения

$$\alpha n + \beta m = \lambda\,. \tag{5.53}$$

В зависимости от того какие выбраны числа α, β и λ данное уравнение может иметь конечное или бесконечное число решений, или вообще не иметь ни одного решения.

Заключение.

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Разработан метод вычисления классических r-матриц для интегрируемых систем, полученных в рамках гамильтоновой редукции. Показано, что предложенный метод воспроизводит известную классическую r-матрицу эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином.

- Предложен пример интегрируемой системы, полученной путём гамильтоновой редукции по действию нелиевых симметрий. Показано, что, несмотря на более сложную природу калибровочных преобразований, используемых в построении системы, соответствующие уравнения движения решаются методом проектирования.

- Построена явно ковариантная геометрическая формулировка виковского символа на симплектическом многообразии в рамках метода Федосова. Описана геометрия симплектических многообразий, допускающих конструкцию виковского символа и доказана теорема идентификации таких многообразий, обобщающая известную теорему Ньюлендера-Ниренберга об идентификации комплексных многообразий.

- Предложена конструкция локального преобразования эквивалентности виковского и вейлевского звёздочка-произведений. Найдена 2-форма, представляющая когомологический класс, который является препятствием к существованию глобальной эквивалентности. В частном случае кэлерова многообразия показано, что виковское и вейлевское звёздочка-произведения глобально эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующее кэлерово многообразие является многообразием Калаби-Яу.

- Предложена простая итерационная процедура деформационного квантования некоторого класса нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с постоянными решениями классического уравнения Янга-Бакстера. Показано, что предложенная процедура позволяет проквантовать произвольную треугольную биалгебру Ли.

Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [24], [25], [26], [27], [93], [94], [95], [96]. Они докладывались на следующих международных конференциях:

1. Международная конференция "Квантование, Калибровочная Теория и Струны", посвящённая памяти академика Е.С. Фрадкина (Москва, 5-10 июня 2000 г.)

2. Международная конференция "Суперсимметрия, Квантовая Теория Поля", посвящённая памяти профессора Д.В. Волкова (Харьков, 25-29 июля 2000 г.)

3. Международная конференция "Новые достижения в Теориях Фундаментальных Взаимодействий" (Польша, Карпач, 6-15 февраля 2001 г.)

4. Международная конференция "Квантовые Группы и Интегрируемые Системы" (Чехия, Прага, 20-22 июня 2002 г.)

Помимо этого, результаты настоящей работы докладывалась на семинаре Отдела теоретической физики им. И.Е.Тамма Физического института РАН имени П.Н. Лебедева, а также на семинарах Лабораторий теоретической и математической физики Государственного научного центра Института теоретической и экспериментальной физики.

В заключение, я выражаю искреннюю благодарность своим руководителям докторам физико-математических наук А.П. Исаеву и С.Л. Ляховичу за всестороннюю поддержку и помощь в работе.

Я благодарен своим первым учителям томской школы теоретической физики В.Г. Багрову, В.А. Бордовицыну, И.Л. Бухбиндеру, А.А. Ваалю, И.В. Горбунову, Г.Ф. Караваеву, И.Ю. Каратаевой, Я.В. Лисицыну, В.Е. Любовицкому, В.Д. Першину, Б.Ф. Самсонову, А.Г. Сибирякову, А.Ф. Терпуговой, А.Ю. Трифонову, А.В. Шаповалову, А.А. Шарапову и К.М. Шехтеру.

Я выражаю благодарность Г. Брадену, А.В. Зотову за плодотворное научное сотрудничество по теме диссертации, а также особую благодарность М.А. Ольшанецкому и А.А. Шарапову, которые в разное время являлись моими научными наставниками и постоянно оказывали огромное влияние на круг моих научных интересов.

Я благодарен сотрудникам Отдела теоретической физики им. И.Е.Тамма Физического института РАН имени П.Н. Лебедева М.А. Васильеву, М.А. Григорьеву, В.Н. Зайкину, А.М. Семихатову, М.А. Соловьёву, И.Ю. Типунину И.В. Тютину и В.Я. Файнбергу за стимулирующие обсуждения и создание благоприятных условий работы во время прохождения моей научной стажировки в этом отделе в рамках Федеральной Целевой Программы “Интеграция” в период с сентября по декабрь 2000 г.

Я также благодарю сотрудников Лаборатории теоретической физики им. Боголюбова ОИЯИ, а также лабораторий математической и теоретической физики ГНЦ ИТЭФ Э.Т. Ахмедова, А.А. Владимирова, А.А. Герасимова, А.Л. Городенцева, А.С. Горского, А.В. Забродина, А.Ю. Котова, А.М. Левина, А.С. Локтева, А.С. Лосева, А.Д. Миронова, А.Ю. Морозова, С.В. Облезина, С.З. Пакуляка, П.Н. Пятова, А.А. Рослого, К.А. Сарайкина К.Г. Селиванова, Д.В. Талалаева, Н.А. Тюрина, Д.В. Фурсаева, С.М. Харчёва и С.М. Хорошкина, А.В. Червова, Ю.Б. Чернякова, Г.Б. Шабата и Г.И. Шарыгина за стимулирующие обсуждения и создание благоприятных условий для выполнения работы. Я благодарю Е.С. Суслову за техническую помощь в подготовке текста диссертации.

Диссертация выполнена в Объединённом Институте Ядерных Исследования и, частично, в Государственном научном центре Институте теоретической и экспериментальной физики. Данная работа была поддержана Российским Фондом Фундаментальных исследований 00-02-17956, грантом РФФИ поддержки молодых ученых, студентов и аспирантов 01-02-06418, грантом поддержки научных школ 00-15-96557 и грантами INTAS 00-262 и 00-561.

Библиография

[1] А.М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Ижевск, Издательский дом "Удмуртский университет", (1999).

[2] А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Москва, Наука (1988).

[3] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. **B25** (1967) 29–30.

[4] E.S. Fradkin, G.A. Vilkovisky, *Quantization of relativistic systems with constraints*, Phys. Lett. **B55** (1975) 224–226;
I.A. Batalin, E.S. Fradkin, *A generalized canonical formalism and quantization of reducible gauge theories*, Phys. Lett. **B122** (1983) 157–164;
I.A. Batalin, E.S. Fradkin, *Operator quantization of relativistic dynamical systems subject to first class constraints*, Phys. Lett. **B128** (1983) 303–308.

[5] M. Henneaux, C. Teitelbom, *Quantization of gauge systems*, Princeton, USA, Princeton Univ. Press (1992).

[6] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Москва, Наука (1989).

[7] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71**, 5 (1981) 314–400.

[8] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **94**, 6 (1983) 313–404.

[9] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *Integrability and Seiberg-Witten exact solution*, Phys. Lett. **B355** (1995) 466–474; hep-th/9505035.

[10] A. Gorsky, A. Mironov, *Integrable many-body systems and gauge theories*, 2000, hep-th/0011197.

[11] N. Seiberg, E. Witten, *Monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19–52; hep-th/9407087.

[12] N. Seiberg, E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484–550; hep-th/9408099.

[13] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85–126; hep-th/9503124.

[14] A. Sen, C. Vafa, *Dual pairs of type II string compactification*, Nucl. Phys. **B455** (1995) 165–187; hep-th/9508064.

[15] J. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities*, 1996, hep-th/9607201.

[16] C. Vafa, *Lectures on Strings and Dualities*, 1997, hep-th/9702201.

[17] M.A. Vasiliev, *Higher spin gauge theories in four-dimensions, three-dimensions, and two-dimensions*, Int. J. Mod. Phys. **D5** (1996) 763–797; hep-th/9611024.

[18] A.Yu. Segal, *Conformal Higher Spin Theory*, Preprint FIAN-TD-14-02, 2002, hep-th/0207212.

[19] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization* J. Diff. Geom. **40** (1994) 213–238.

[20] M.A. Grigoriev, S.L. Lyakhovich, *Fedosov Deformation Quantization as a BRST Theory*, Commun. Math. Phys. **218** (2001) 437–457; hep-th/0003114.

[21] B.V. Fedosov, *Defomation Quantization and Index Theory*, Berlin, Akademia Verlag (1996).

[22] M. Bordemann, S. Waldmann, *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds*, Lett. Math. Phys. **41**, 3 (1997) 243–253; q-alg/9605012.

[23] A.V. Karabegov, *On Fedosov's Approach to Deformation Quantization with Separation of Variables*, Proc. of the conference dedicated to Moshe Flato 1999, Math. Phys. Stud. 22, Vol. II, 167–176, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2000); math/9903031.

[24] V.A. Dolgushev, S.L. Lyakhovich, and A.A. Sharapov, *Wick Type Deformation Quantization of Fedosov Manifolds*, Nucl. Phys. **B606** (2001) 647–672; hep-th/0101032.

[25] V.A. Dolgushev, S.L. Lyakhovich, and A.A. Sharapov, *Wick Symbol and Deformation of the Exterior Algebra*, in "Quantization, Gauge Theory, and Strings" (Proc. of the International Conference dedicated to the memory of Prof. Efim Fradkin, Moscow, Russia, June 5-10, 2000), Vol. 2, p.19, Scientific World, Moscow, 2001; hep-th/0010029.

[26] V.A. Dolgushev, S.L. Lyakhovich, and A.A. Sharapov, *Wick Quantisation of a Symplectic Manifold*, in "Supersymmetry and Quantum Field Theory" (Proc. of the International Conference dedicated to the memory of Prof. Dmitry Volkov, Kharkiv, Ukraine, July 24-29, 2000), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **102** (2001) 144–149; ITEP-TH-10-01; hep-th/0103091.

[27] V.A. Dolgushev, *The Fedosov Class of the Wick-Type Star-Product*, in "New Developments in Fundamental Interactions Theories" (Proc. of the International Conference Karpacz, Poland, February 6-15, 2001), AIP Conference Proceedings, Vol. 589, Melville, N.Y. (2001) 416–424.

[28] I.A. Batalin, M.A. Grigoriev, S.L. Lyakhovich, *Star Product for Second Class Constraint Systems from a BRST Theory* Theor. Math. Phys. **128** (2001) 1109–1139, hep-th/0101089.

[29] A.V. Karabegov and M. Schlichenmaier, *Almost-Kähler deformation quantization*, Lett. Math. Phys. **57**, 2 (2001) 135–148; math/0102169.

[30] V. Bazhanov, S. Lukyanov, and A. Zamolodchikov, *Integrable Structure of Conformal Field Theory, Quantum KdV Theory and Thermodynamic Bethe Ansatz*, Commun. Math. Phys., **177** (1996) 381–398; hep-th/9412229.

[31] Е.К. Склянин, *О полной интегрируемости уравнения Ландау-Лифшица*, Препринт ЛОМИ Е-3-79, Ленинград (1979).

[32] М.А. Семёнов-Тян-Шанский, *Что такое классическая r-матрица?*, Функц. анал. и прил. **17**, вып. 4 (1983) 17–33.

[33] O. Babelon, C.M. Viallet, *Hamiltonian Structures and Lax Equation*, Phys. Lett. **B237** (1990) 411–421.

[34] P. Etingof, A. Varchenko, *Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups*, Commun. Math. Phys. **196**, 3 (1998) 591–640; q-alg/9708015.

[35] N. Nekrasov, *Holomorphic bundles and many-body systems*, Commun. Math. Phys. **180** (1996) 587–604; hep-th/9503157.

[36] M.A. Olshanetsky, *Generalized Hitchin systems and Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equation on elliptic curves*, Lett. Math. Phys. **42** (1997) 59–71; hep-th/9510143.

[37] Д.В. Талалаев, *Эллиптическая система Годена со спином*, ТМФ **130** (2002) 426–441; hep-th/0101224.

[38] N.J. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. Journal **54**, 1 (1987) 91–114.

[39] J. Avan, O. Babelon, and M. Talon, *Construction of the classical R-matrices for the Toda and Calogero models*, Preprint PAR-LPTHE-93-31; hep-th/9306102.

[40] G.E. Arutyunov, P.B. Medvedev, *Geometric construction of the classical R-matrices for the elliptic and trigonometric Calogero-Moser systems*, hep-th/9511070.

[41] L. Fehér, A. Gábor, and B.G. Pusztai, *On dynamical r-matrices obtained from Dirac reduction and their generalizations to affine Lie algebras*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 36 (2001) 7335–7348; math-ph/0105047.

[42] P. Etingof and A. Varchenko, *Geometry and classificatin of solutions of the classical dynamical Yang-Baxter equation*, Commun. Math. Phys. **192**, 1 (1998) 77–120; q-alg/9703040.

[43] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roćek, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys. **108** (1987) 535-589.

[44] Е.К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера*, Функц. анализ и прил. **16**, 4 (1982) 27–34.

[45] М.В. Карасёв, *Аналоги объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона*, Изв. АН СССР, Сер. мат. **50**, 3 (1986) 508–538.

[46] K. Mackenzie *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, London Math. Soc., Lecture Note Series **124**, Cambridge, Cambridge University Press (1987).

[47] P.J. Higgins and K. Mackenzie, *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids*, J. Algebra **129**, 1 (1990) 194–230.

[48] K. Mackenzie, P. Xu, *Integration of Lie bialgebroids*, Topology **39**, 3 (2000) 445–467; dg-ga/9712012.

[49] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419–436.

[50] Ф.А. Березин, *Квантование*, Изв. Акад. Наук **38** (1974) 1116–1175;
F.A. Berezin, *General concept of quantization*, Commun. Math. Phys. **40** (1975) 153–174.

[51] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization. I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Physics **111**, 1 (1978) 61–110; *Deformation theory and quantization. II. Physical applications*, Ann. Physics **111**, 1 (1978) 111–151.

[52] D. Sternheimer, *Deformation Quantization. Twenty Years After*, Proc. of the 1998 Lodz conference "Particles, Fields and Gravitation"; math/9809056.

[53] M. DeWilde, P. B. A. Lecomte, *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary sympletic manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 487–496.

[54] R. Nest, B. Tsygan, *Algebraic index theorem for families*, Adv. Math. **113**, 2 (1995) 151–205.

[55] M. Bertelson, M. Cahen, and S. Gutt, *Equivalence of star products. Geometry and physics*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) A93–A107.

[56] P. Deligne, *Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte*, Selecta Mathematica, New Series 1 (1995) 667–697.

[57] P. Xu, *Fedosov $*$-products and quantum momentum maps*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 167–197.

[58] M. Kontsevich, *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I*, q-alg/9709040.

[59] Ф.А. Березин, *Квантование в комплексных симметрических пространствах*, Изв. Акад. Наук **39**, 2 (1975) 363–402.

[60] В.Ф. Молчанов, *Квантование на мнимой плоскости Лобачевского*, Функ. Анализ Прил. **14**, 2 (1980) 73–74.

[61] A.V. Karabegov, *Deformation Quantizations with Separation of Variables on a Kähler Manifold*, Commun. Math. Phys. **180**, 3 (1996) 745–755; hep-th/9508013.

[62] A.V. Karabegov, *Pseudo-Kähler quantization on flag manifolds*, Commun. Math. Phys. **200**, 2 (1999) 355–379; dg-ga/9709015.

[63] C. Moreno, *$*$-products on Some Kähler Manifolds*, Lett. Math. Phys. **11**, 4 (1986) 361–372.

[64] M. J. Pflaum, *The Normal Symbol on Riemannian Manifolds*, New York J. Math. **4** (1998) 97–125.

[65] N. Reshetikhin, L. Takhtajan, *Deformation Quantization of Kähler Manifolds*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 201 (2000) 257–276; math.QA/9907171.

[66] N.J.M. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford University Press, Oxford, (1992).

[67] I. Gelfand, V. Retakh, and M. Shubin, *Fedosov Manifolds*, Adv. Math. **136**, 1 (1998) 104–140; dg-ga/9707024.

[68] M.A. Rieffel, *Deformation Quantization for Action of R^d*, Mem. Amer. Math. Soc. **106**, 506, pp. 93, Providence, (1993).

[69] M.A. Rieffel, *Questions on quantization*, in Operator algebras and operator theory (Proc. of the international conference, Shanghai, 1997), Amer. Math. Soc. Contemp. Math. **228** (1998) 315–326, Providence, RI; quant-ph/9712009.

[70] В.Г. Дринфельд, *О постоянных квази-классических решениях квантового уравнения Янга-Бакстера*, ДАН СССР **28** (1983) 531–535.

[71] А.Г. Элашвили, *Фробениусовы алгебры Ли*, Функц. Анализ Прил. **16** (1982) 94–95; Труды Тбилисского Математического Института **127** (1985) 127–137.

[72] P.P. Kulish, V.D. Lyakhovsky, A. Stolin, *Chains of Frobenius subalgebras of so(M) and the corresponding twists*, J. Math. Phys. **42**, 10 (2001) 5006–5019; math.QA/0010147;
P.P. Kulish, V.D. Lyakhovsky, M.A. del Olmo, *Chains of twists for classical Lie algebras*, Journ. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 8671–8684; math.QA/9908061.

[73] A.S. Cattaneo, G. Felder, and L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, Duke Math. J. **115** 2 (2002) 329–352; math.QA/0012228.

[74] Л.Д. Фаддеев, Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджян, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Ленинград. Мат. Ж. **1** (1990) 193–225; Алгебра и Анализ **1**, 1 (1989) 178–206.

[75] A. Giaquinto and J. Zhang, *Bialgebra action, twists, and universal deformation formulas*, J. Pure Appl. Algebra **128**, 2 (1998) 133–151; hep-th/9411140.

[76] P. Xu, *Triangular dynamical r-matrices and quantization*, Adv. Math. **166**, 1 (2002) 1–49; math.QA/0005006.

[77] I. Vaisman, *Fedosov quantization on symplectic ringed spaces*, J. Math. Phys. **43**, 1 (2002) 283–298; math.SG/0106070.

[78] M. F. Atiyah, *Vector Bundles over an Elliptic Curve*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957) 414–452.

[79] A.N. Tyurin, *Classification of Vector Bundles over an Algebraic Curve of Arbitrary Genus*, Amer. Math. Soc. Translat., II, Ser. 63 (1967) 245–279.

[80] B. Enriquez, V. Rubtsov, *Hecke-Tyurin parametrization of the Hitchin and KZB systems*, math.AG/9911087.

[81] I.M. Krichever, *Vector Bundles and Lax Equations on Algebraic Curves*, Commun. Math. Phys. **229**, 2 (2002) 229–269; hep-th/0108110.

[82] B. Enriquez, V. Rubtsov, *Hitchin systems, higher Gaudin operators and r-matrices*, Math. Res. Lett. **3**, 3 (1996) 343–357; alg-geom/9503010.

[83] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, *Progress in Mathematics*, 44, Birkhaeuser, Boston, (1983).

[84] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, *Hamiltonian algebroid symmetries in W-gravity and Poisson sigma-model*, Preprint ITEP-TH-15-00, IHES-P-00-69, hep-th/0010043.

[85] B.L. Feigin, A.V. Odesskii, *Vector Bundles on Elliptic Curve and Sklyanin Algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 185 (1998) 65–84; q-alg/9509021.

[86] M. Audin, *Spinning tops*, Cambridge, Cambridge University Press (1996).

[87] V. Cruceanu, P. Fortuny, and P.M. Gadea, *A Survey on Paracomplex Geometry*, Rocky Mt. J. Math. **26**, 1 (1996) 83–115.

[88] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds*, Ann. Math. **65**, 3 (1957) 391–404.

[89] P. Bonneau, *Fedosov star products and one-differentiable deformations*, Lett. Math. Phys. **45**, 4 (1998) 363–376; math/9809032.

[90] S.S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, 2nd edition, Universitext Springer, Berlin, (1979).

[91] М.В. Карасёв, В.П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Москва, Наука, (1991).

[92] V. Coll, M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, *An explicit deformation formula with noncommuting derivations*, Proc. of Israel Math. Conference on Ring Theory, Weizmann Science Press, New York, **1** (1989) 396–403.

[93] V.A. Dolgushev, *Sklyanin bracket and deformation of the Calogero-Moser system*, Mod. Phys. Lett. **A 16** (2001) 1711–1725; ITEP-TH-7-01; hep-th/0102167.

[94] V.A. Dolgushev, A.P. Isaev, S.L. Lyakhovich, and A.A. Sharapov, *On the Fedosov deformation quantization beyond the regular Poisson manifolds*, Nucl. Phys. **B645**, 3 (2002) 457–476; ITEP-TH-30/02; hep-th/0206039.

[95] V.A. Dolgushev, A.P. Isaev, S.L. Lyakhovich, and A.A. Sharapov, *Quantization of triangular Lie bialgebras*, in "Quantum Groups and Integrable Systems" (Proc. of the International Conference, Prague, Czech Republic, June 20-22, 2002), Czech J. Phys. **52**, 11 (2002) 1195–1200.

[96] H.W. Braden, V.A. Dolgushev, M.A. Olshanetsky, and A.V. Zotov, *Classical r-matrices and the Feigin-Odesskii algebra via Hamiltonian and Poisson reductions*, Preprint ITEP-TH-03/03; EMPG-03-01; hep-th/0301121.