Über ein elementares Variationsproblem.

Von R. Sprague.

Einleitung: Unter diesem Titel hat vor Jahren Herr Julius Pál[1] die Aufgabe behandelt, möglichst kleine ebene Flächenstücke anzugeben, mit denen man jede beliebige ebene Punktmenge vom Durchmesser 1 bedecken kann; als Durchmesser einer Punktmenge wird die obere Grenze des Abstandes zweier Punkte der Menge bezeichnet.

Flächenstücke mit dieser Überdeckungseigenschaft, kurz „Tafeln" genannt, sind z. B. der Kreis mit dem Radius 1 (das ist trivial: man lege seine Mitte auf einen beliebigen Punkt der Menge), sogar der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (nach einem Satze von Herrn Jung), sowie das Quadrat mit der Seite 1.

Von den Ergebnissen Herrn Páls seien hervorgehoben:

a) Das regelmässige Sechseck mit der Seite $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist eine Tafel.

b) Dies Sechseck lässt sich zu einer achteckigen Tafel T verkleinern, deren Flächeninhalt nur $2-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} < 0{,}8453$ beträgt. (Das ist die kleinste Tafel, die Herr Pál angegeben hat).

c) Der Flächeninhalt jeder Tafel ist grösser als $\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4} >$ 0,8257.

d) Es gibt mindestens eine Tafel kleinsten Flächeninhalts. –

Im folgenden wird das Ergebnis a) neu begründet (§ 1), von b) der Übergang zur Tafel T reproduziert (§ 2) und dann gezeigt, dass die Tafel T weiterhin verkleinert werden kann, also keine Tafel kleinsten Flächeninhalts darstellt (§ 3).

§ 1.

Jede ebene Punktmenge vom Durchmesser 1 findet Platz auf dem regelmässigen Sechseck mit der Seite $\frac{1}{\sqrt{3}}$. – Der Durchmesser einer Punktmenge μ, deren Häufungspunkte die Menge ν bilden, stimmt mit dem Durchmesser der Vereinigungsmenge von μ und

[1]) Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser III 2, København 1920.

ν überein; es genügt darum hier, ***abgeschlossene*** ebene Punktmengen vom Durchmesser 1 zu betrachten.

Jede Gerade, die mindestens einen Punkt, und deren eine Halbebene im Innern keinen Punkt einer solchen Menge α enthält, heisse eine ***Stützgerade*** von α.

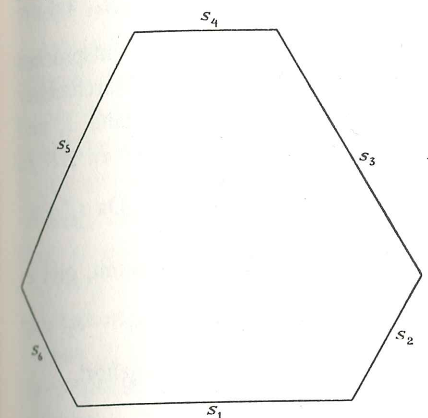

Fig. 1.

Zu jeder Geraden der Ebene gibt es zwei ihr parallele Stützgeraden von α. Man kann daher um α ein gleichwinkliges Sechseck (Fig. 1) zeichnen, dessen Seiten s_1, s_2, s_3 auf Stützgeraden g_1, g_2, g_3 liegen, während s_4, s_5, s_6 diesen Stützgeraden im Abstand 1 parallel laufen. Die Reihenfolge $s_1, s_2, \cdots$ möge dem positiven Umlaufsinn entsprechen. Die Summe zweier benachbarten Seiten dieses Sechsecks beträgt stets $\frac{2}{\sqrt{3}}$, also ist $s_1 = s_3 = s_5$, $s_2 = s_4 = s_6$.

Falls schon $s_1 = s_2$ ist, liegt α, wie behauptet, auf dem regelmässigen Sechseck mit der Seite $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Im andern Falle möge ein neues gleichwinkliges Sechseck um α gezeichnet werden, dessen in positivem Umlaufsinn aufeinanderfolgende Seiten s_1', s_2', s_3' wieder auf Stützgeraden g_1', g_2', g_3' liegen, während s_4', s_5', s_6' zu g_1', g_2', g_3' im Abstand 1 parallel laufen. Die Stützgerade g_1' bilde mit g_1 den Winkel φ $\left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3}\right)$ und werde in ihrer Abhängigkeit von φ eindeutig bestimmt durch die Festsetzung, dass sie mit s_1 mindestens einen Punkt gemeinsam haben und aus g_1 durch Drehung im positiven Sinne um φ entstehen soll. Dann wird

bei $\varphi = 0$ $\quad g_1' = g_1, \quad g_2' = g_2, \quad g_3' = g_3,$

bei $\varphi = \frac{\pi}{3}$ $\quad g_1' = g_2, \quad g_2' = g_3.$

Ferner ist leicht zu sehen, dass z. B. s_2' als Funktion von φ bei $\varphi = 0$ und damit, weil die Richtung von g_1 beliebig gewählt war, für alle Werte von φ stetig ist. Mit s_2' sind auch die anderen Seitenlängen des von φ abhängigen Sechsecks stetige Funktionen von φ. Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ wird $s_1' = s_2$, wenn die Gerade g_4, auf der s_4 liegt, Stützgerade ist. Dieser Bedingung kann stets entsprochen werden; denn jede abgeschlossene Punktmenge vom Durchmesser 1 enthält mindestens ein Punktepaar A, B vom Abstand 1, und es genügt, g_1 durch A, g_4 durch B, beide senkrecht zu AB zu legen. Dann wird bei $\varphi = \frac{\pi}{3}$ $s_1' = s_2$, $s_2' = s_3$ usw. Da $s_1' - s_2'$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ entgegengesetzte Werte annimmt, gibt es in diesem Intervall einen Wert von φ, zu welchem $s_1' = s_2'$ und daher das *regelmässige* Sechseck mit der Seite $\frac{1}{\sqrt{3}}$ gehört.

§ 2.

Die regelmässig-sechseckige Tafel des § 1, die dem Kreise vom Durchmesser 1 umschrieben ist, lässt sich in einfacher Weise verkleinern.

Zeichnet man noch das demselben Kreise umschriebene regelmässige Zwölfeck, dessen Ecken auf den Seiten des Sechsecks liegen, so werden in den Ecken des Sechsecks Dreiecke $\Delta_1, \cdots, \Delta_6$ gebildet. Von zwei einander gegenüberliegenden Dreiecken enthält mindestens eines keine Punkte von α. Wie diese leeren Dreiecke auch verteilt sein mögen, es gibt immer zwei, die nicht benachbart sind (und einander nicht gegenüberliegen). Daher dürfen Δ_1 und Δ_3 abgeschnitten werden, und man erhält die Pál'sche achteckige Tafel T (Fig. 2).

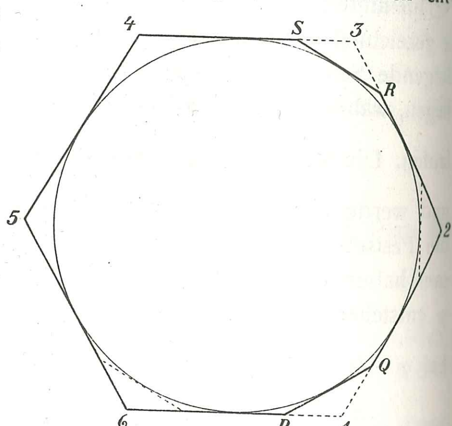

Fig. 2.

§ 3.

Die Tafel T ist keine Tafel kleinsten Flächeninhalts.

Es soll gezeigt werden, dass von der Ecke 5 der Tafel T noch das Stück abgeschnitten werden kann, das ausserhalb des Kreises um R mit dem Radius 1 liegt; dabei darf angenommen werden, dass Δ_2 keine Punkte von α enthält, sonst wäre ja sogar Δ_5 leer und die neue Tafel T' gewiss ausreichend. Die Tafel T möge in der Richtung von *2* nach *5* so weit verschoben werden, bis der Rand $P-Q-2-R-S$, und zwar etwa das Stück $2-R-S$ (mindestens) einen Punkt von α enthält. Liegt dieser Punkt auf $2-R$, so genügt offenbar T' zur Bedeckung von α.

Liegt der Punkt jedoch auf $R-S$, so ist Δ_6 leer. T werde dann in der Richtung von *2* nach *4* verschoben, bis der Rand $6-P-Q-2-R$ einen Punkt C von α enthält. Dabei bleibt Δ_6 leer und Δ_2 darf ständig als leer vorausgesetzt werden. Die Tafel T ohne Δ_6 und Δ_2 ist zur Mittelsenkrechten von $4-5$ symmetrisch, daher darf angenommen werden, dass C auf der zu *4* gehörenden Halbebene liegt, und dann, wegen der Symmetrie von T, dass C auf $2-R$ liegt. Also ist T' eine Tafel und darum T keine Minimaltafel.

Litteraturanmeldelse.

Ch. Platrier, Exposés de géométrie cinématique. Cours de l'École polytechnique. I. Cinématique du solide et théorie des vecteurs. II. La masse en cinématique et théorie des tenseurs du second ordre. III. Cinématique des milieux continus. (Actualités scientifiques et industrielles, 325—327, Hermann & C[ie], Paris 1936). Tilsammen 176 Sider, 38 fr.

Afdøde Professor Juel sagde engang, at det vilde være et interessant Eksperiment at læse over Mekanik paa den Maade, at man først gennemgik alle de Ting, man behøvede fra Mekanikens Hjælpevidenskaber, saaledes at man derefter kunde give det egentlig mekaniske i en saa sammentrængt Form, at Mekanikens Simpelhed traadte klart frem. Det er dog maaske snarere Læreren end de Studerende, der vilde finde denne Behandlingsmaade morsom. Det er en lignende Fremgangsmaade Professor Platrier,