57.

Repartición de corriente en una red conductora. (Introducción al análisis combinatorio)

Revista Matematica Hispano-Americana 5, 153—164 (1923)
Englische Übersetzung: George Washington University Logistics Research Project (1951)

La ciencia del Continuo, el Análisis situs, contiene una parte puramente combinatoria que hoy, gracias sobre todo a los trabajos fundamentales de H. Poincaré (*), puede ser estudiada autonómicamente y es susceptible de una exposición sistemática y completa. De este asunto me ocupé en las lecciones del año 1918 en la Escuela Técnica Superior de Zurich. Desde entonces se han publicado trabajos, en el mismo sentido, por O. Veblen (**), y limitados al caso bidimensional por Chuard (***). Como introducción a estos razonamientos es sumamente apropiado el problema (unidimensional) de la repartición de corriente en una red conductora arbitrariamente complicada, porque nos pone de relieve los conceptos fundamentales que luego pueden ser extendidos al caso de más dimensiones.

La red conductora supondremos que esté formada por un número finito de hilos homogéneos, los cuales concurren en número finito de nudos. La figura geométrica será designada con el nombre de *complejo de segmentos*, los nudos serán los *puntos* del complejo y los diversos trozos de hilo contados de nudo a nudo serán sus *segmentos*.

En forma más rigurosa:

Un complejo de segmentos consta de un número finito de «puntos» o elementos de dimensión cero y un número de «segmentos» o elemen-

---

(*) *Analysis situs.* J de l'Ecole Politech. 1895. *Complement a l'Analysis situs,* Rend. Palermo, 1899. *Second complement a l'Analysis situs.* Proc. London Math. Soc. 1900. *Cinquieme complement a l'Analysis situs.* Rend. Palermo, 1904.

(**) The Cambridge Colloquium, 1916, part. II. *Analysis situs,* American Math. Soc. New York, 1922.

(***) Rend. Palermo, 1922.

tos de dimensión uno. Cada segmento está limitado por dos de esos puntos y los datos que tengamos sobre ello constituyen el esquema del complejo.

En vez de la expresión: el punto a limita el segmento σ, usaremos también el modismo: σ termina en a o bien σ y a son elementos incidentes del complejo. No es necesario que en un punto a terminen siempre tres o más segmentos, sino que puede suceder también que sólo dos y aun un segmento acaben en a, puede también a ser un punto aislado y no limitar así ningún segmento.

Admitiremos también que en el complejo no aparezcan segmentos, esto es, que pueda estar formado solamente por puntos, pero excluiremos el «conjunto nulo» que no contiene puntos ni segmentos. En el esquema del complejo, al cual ha de aplicarse el análisis situs combinatorio (no importa cuál sea la naturaleza de los elementos que constituyen el complejo) los elementos han de distinguirse unos de otros por algún signo, por ejemplo, en el complejo, formado por las aristas y los vértices de un tetraedro (configuración del puente de Wheatstone) intervienen 4 puntos 0, 1, 2, 3, y seis segmentos $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, y el esquema será

$$\alpha\begin{cases}0\\1\end{cases},\ \beta\begin{cases}0\\2\end{cases},\ \gamma\begin{cases}0\\3\end{cases}\qquad \alpha'\begin{cases}2\\3\end{cases},\ \beta'\begin{cases}3\\1\end{cases},\ \gamma'\begin{cases}1\\2\end{cases}$$

simbolos que deben leerse, por ejemplo, $\alpha\begin{cases}0\\1\end{cases}$, α está limitado por 0 y 1.

Un complejo C puede ser conexo o bien estar formado por varias porciones no conexas entre sí. Una parte C' de los elementos de C se llama aislada cuando no hay ningún par de elementos incidentes en C, de los cuales uno pertenezca a C' y el otro no. Un complejo es conexo cuando sus elementos no pueden repartirse en modo alguno en dos partes aisladas C' y C''.

El segmento σ limitado por los puntos a y b, puede ser recorrido en dos distintas direcciones de a a b o de b a a. Una *cadena* es una sucesión de segmentos dirigidos, en la cual el extremo de un segmento sirve de origen al siguiente. Si se dan los puntos por los que pasa la cadena, ésta se puede definir como una sucesión alternada de elementos del complejo. «Punto, segmento, punto, segmento, ..., punto», en la cual cada segmento está flanqueado por los dos puntos que lo limitan. La cadena *une* el primer punto de la sucesión con el último y será *cerrada* si coinciden el primero y el último punto; entonces la sucesión no se considera ya como lineal, sino como ordenada cíclicamente, y en ella el recorrido puede empezarse por cualquier punto. En general no se supone que todos los elementos de la sucesión sean distintos unos de otros, pudiendo pasar varias veces por el mismo punto o el mismo segmento. Si todos los elementos de la sucesión son distintos entre sí, la cadena será *simple*, y una cadena simple y cerrada se llamará *ciclo* o circuito.

Todo complejo se descompone de una sola manera en un conjunto de complejos parciales aislados y conexos. Uno de tales complejos parciales puede obtenerse del modo siguiente: Se parte de un punto *o*, se añaden todos los segmentos que parten de *o*, después los puntos distintos de *o* que limitan dichos segmentos, después se buscan los segmentos que parten de dichos puntos y no han sido considerados todavía, y así sucesivamente hasta que el método no dé ningún elemento nuevo. Así se obtiene el sistema *C* (*o*), correspondiente al elemento *o*, el cual es evidentemente conexo y aislado. A él pertenecen todos los puntos, y sólo éstos, que pueden ser unidos a *o* por una cadena, y la construcción prueba que generalmente si una cadena conduce de *o* a *a*, los puntos *o* y *a* pueden unirse mediante una cadena simple. No sólo todo punto *a* de *C* (*o*) puede unirse a *o*, sino que dos puntos cualesquiera *a* y *a′* de *C* (*o*) pueden unirse entre sí, para lo cual basta unir *a* con *o* y *o* con *a′*.

Por consiguiente, si 1 es un punto que no está contenido en *C* (*o*), los elementos del sistema *C* (1) son distintos todos ellos de los del *C* (*o*). De aquí se deduce el teorema sobre la división de un complejo en complejos parciales, conexos y aislados, y además queda demostrado el teorema: *En un complejo conexo se pueden unir dos puntos cualesquiera por una cadena simple.*

Es bien sabido que no puede engendrarse una corriente estacionaria en una red conductora si en ella no hay ningún circuito, ninguna cadena simple cerrada; pero si hay uno basta solamente intercalar una fuerza electromotora en ese circuito para tener una corriente. Por consiguiente, los ciclos representan un papel decisivo para la repartición de corrientes. Un complejo conexo sin ciclos se llama *árbol*.

Si se le construye en el modo antes indicado para el sistema *C* (*o*) a partir de un punto *o*, resulta que en general de un punto obtenido parten varias ramas, pero nunca concurren varias en un extremo común. Cada nueva rama da, por consiguiente, un nuevo punto a su extremo; si se prescinde del *punto raíz* hay tantos puntos como segmentos, o sea, *el número de puntos de un árbol es superior en una unidad al de sus segmentos*.

Un árbol puede (entre los complejos conexos) ser caracterizado también por la propiedad de descomponerse en partes separadas al suprimir un segmento. Si suprimimos de un complejo C el segmento σ con los extremos a, b, y el complejo resultante C' es todavía conexo, se pueden unir a y b mediante una cadena simple de C', la cual, junto con σ forma una cadena simple cerrada en C. Recíprocamente, si en C existe un ciclo, C no se descompone cuando se suprime un segmento del ciclo. De aquí se saca una nueva demostración por reducción del teorema sobre el número de puntos y segmentos de un árbol. Sea N_0 el número de puntos, N_1 el de segmentos y t el de partes conexas y aisladas del complejo. Si el complejo C no contiene ciclos, las t partes del complejo son árboles; suprimiendo un segmento el árbol a que pertenece se descompone en otros dos. Mediante este proceso, que transforma el complejo C en C', N_1 disminuye en 1, t aumenta en 1, por tanto el número $N_1 + t$ no sufre variación. C' es asimismo un complejo sin ciclos. Ahora, suprimiendo uno tras otro los segmentos hasta que no quede ninguno, llegamos a un conjunto C_0 compuesto únicamente de puntos, y para el cual se tiene

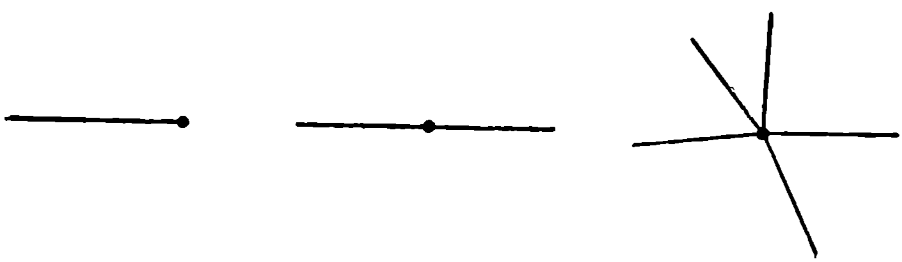
$$N_1^0 = 0 \qquad N_0^0 = N_0 \qquad t^0 = N_0.$$

Como en todos estos pasos $N_1 + t$ permanece invariable, se tendrá

$$N_1 + t = N_1^0 + t^0 = N_0.$$

Si el complejo inicial era un árbol, se tiene $t = 1$, y por consiguiente

$$N_0 = N_1 + 1.$$



Para poder abordar el problema de la repartición de corrie[n]
supondremos que cada segmento σ está provisto de un sentido
recorrido. En cada segmento σ reina una intensidad de corrie[nte]
I^σ positiva cuando la corriente circule en sentido positivo, y neg[a]tiva en caso contrario. Siendo a un nudo, el segmento σ conduce [a] él una cantidad de corriente $\varepsilon_{a\sigma} \cdot I^\sigma$, por unidad de tiemp[o] donde $\varepsilon_{a\sigma} = +1$, si a es el extremo de σ recorrido en sentido positivo, $= -1$ si el origen $e = o$ si no es ni uno ni otro. La *ley d[e] Kirchhoff*, la cual expresa que de a sale tanta corriente como entra, se formula así

$$(1) \qquad \sum_\sigma \varepsilon_{a\sigma} \cdot I\sigma = 0.$$

Hay así N_0 ecuaciones lineales y homogéneas para las N_0 incógnitas I^σ. La matriz $E = \mid \varepsilon_{a\sigma} \mid$ de sus coeficientes, ha sido introducida por primera vez en el Analysis situs por Poincaré.

Para las conexiones de un puente de Wheatstone es la siguiente:

	α	β	γ	α'	β'	γ'
0	-1	-1	-1	0	0	0
1	$+1$	0	0	0	$+1$	-1
2	0	$+1$	0	-1	0	$+1$
3	0	0	$+1$	$+1$	-1	0

¿Qué se puede decir sobre la independencia lineal de las ecuaciones (1)? Supongamos que entre las formas lineales que aparecen en los primeros miembros con las variables I^σ haya una identidad lineal con los coeficientes λ_a esto es, sea

$$\sum_a \lambda_a \varepsilon_{a\sigma} = 0$$

para todos los segmentos σ. Estas ecuaciones dicen que para los puntos a y b que limitan un segmento σ se tiene $\lambda_a = \lambda_b$, de aquí se deduce también que será $\lambda_a = \lambda_b$ cuando a y b sean dos puntos que puedan ser unidos por una cadena. Si el complejo es conexo, las λ_a son todas iguales; entonces entre los primeros miembros de (1) hay sólo una relación lineal (con los coeficientes $\lambda_a = 1$), o sea el número de ecuaciones linealmente independiente es $N_0 - 1$. Si el complejo es un árbol, este número es el mismo N_1 de incógnitas, y según la teoría de ecuaciones lineales no hay otra solución que $I^\sigma = 0$. Esto demuestra el teorema: «En un árbol no puede existir corriente estacionaria».

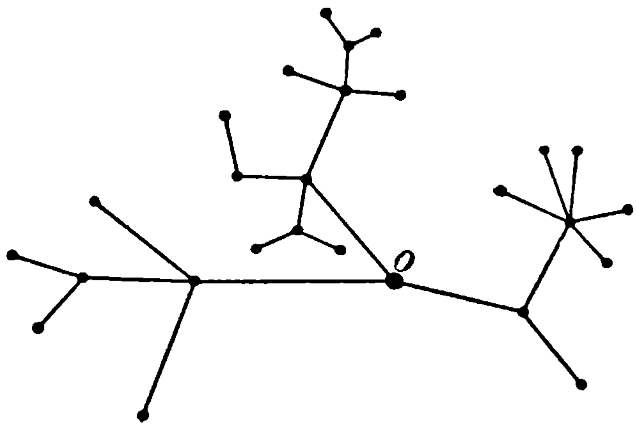
Conocidas las fuerzas electromotoras, la ley de Ohm que ha de ser válida para cada cadena cerrada de la red, nos dará otras ecuaciones lineales para determinar las intensidades. Para determinar el número de ecuaciones independientes que da la ley de Ohm, necesitamos determinar el número de «independientes» ciclos que existen en la red. Esto debe entenderse así. Si una cadena recorre un segmento σ por ejemplo tres veces en sentido positivo y cinco en negativo, decimos que lo recorre en total $3 - 5 = -2$ veces Una cadena hace corresponder a cada segmento σ un indicador i^σ entero que pone de manifiesto cuántas veces es recorrido en total por dicha cadena. Una cadena se considera como nula si todos sus indicadores i^σ son cero; dos cadenas se consideran como equivalentes si los indicadores i^σ son los mismos en ambas. Esta manera de ver es apropiada a nuestro propósito, pues para una cadena equivalente a cero la ley de Ohm da la fórmula idéntica $0 = 0$.

Dos cadenas cerradas $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ pueden ser sumadas. Sea a un punto cualquiera de una cadena y b otro cualquiera de la segunda, basta introducir una cadena de unión entre a y b (admitimos que el complejo de que se trata sea conexo). Primero recorremos $\mathbf{i}_1$, luego la cadena de unión de a a b, luego $\mathbf{i}_2$ y finalmente se vuelve por dicha cadena desde b a a; la cadena cerrada así obtenida es la suma $\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$. La elección de los puntos a y b y de la cadena de unión no tiene influencia alguna sobre la suma, por lo que respecta a la equivalencia, ésta está univocamente determinada. Si i_1^σ son los indicadores que corresponden a los segmentos σ de $\mathbf{i}_1$, e i_2^σ los de $\mathbf{i}_2$, entonces $i_1^\sigma + i_2^\sigma = i^\sigma$ son los indicadores de $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$. Una cadena caracterizada por los números i^σ es cerrada, y sólo entonces, cuando a cada punto afluyen tantos segmentos de la cadena como parten, esto es, si para cada punto a es válida la ecuación

$$(2) \qquad \sum_\sigma \varepsilon_{a\sigma} i^\sigma = 0.$$

Las soluciones enteras de las ecuaciones (1) nos dan las cadenas cerradas de la red. La cuestión de las cadenas cerradas independientes unas de otras es idéntica a la de las soluciones enteras linealmente independientes de esas ecuaciones.

Se hace un progreso conceptual cuando el árbol se define, no como un complejo conexo en el cual no existe ninguna cadena simple cerrada, sino como un complejo en el cual toda cadena cerrada es equivalente a cero. Para comprobar la equivalencia de ambas definiciones hay que demostrar, que: Si no hay ningún ciclo, toda cadena cerrada es equivalente a cero. Esto se puede deducir de la teoría de ecuaciones lineales, ya vimos antes que las ecuaciones (2) tienen como única solución $i^{\sigma} = 0$ cuando el complejo es un árbol en el primitivo sentido. El mismo resultado puede obtenerse con una construcción sencilla. Los puntos y segmentos de una cadena cerrada



i forman una sucesión cíclica. Si no existen cadenas cerradas simples, entonces un elemento ha de aparecer múltiple en la sucesión **i**. Si al recorrerla desde un punto el primer elemento que se hallase dos veces fuese un punto a, la parte de cadena desde a hasta a sería un ciclo simple. Así, pues, dicho elemento debe ser un segmento σ y en **i** existe la sucesión ..... $a \sigma b \sigma a$ ..... (retroceso de la cadena en el punto b); pues si hubiere más elementos que b antes de repetirse σ

$$\ldots\ldots a \sigma b \ldots\ldots a' \sigma b' \ldots\ldots$$

entonces a' debería coincidir con a o b y el elemento a' se repetiría antes que σ. Entonces separamos de la sucesión la porción $\sigma b \sigma a$ y se reduce la cadena cerrada dada a otra equivalente cuya sucesión de puntos y segmentos se ha reducido en cuatro elementos. Este método puede ser aplicado hasta que la cadena cerrada se ha reducido a cero.

Si *demolemos* el complejo suprimiendo uno tras otro los segmentos, por cada operación el número N_1 disminuye en 1 y t crece en 0 o en 1. Si el cero aparece g veces, el número $N_1 + t$ viene disminuído g veces en una unidad y $N_1 - g$ veces permanece constante; por tanto

$$(N_1 + t) - g = N_0.$$

Para un complejo conexo se tiene, en particular,

$$g = N_1 - N_0 + 1. \tag{3}$$

Para un complejo conexo el número g definido por (3) es siempre ≥ 0, y de cualquier modo que el complejo sea demolido ocurre siempre un mismo número de veces que al suprimir un segmento no haya nueva descomposición. En particular, puede conducirse la operación de tal modo que después de las g primeras operaciones el complejo permanezca conexo y, por tanto, al suprimir los primeros g segmentos se reduzca a un árbol. En tanto $g \neq 0$ el complejo no se ha transformado aún en un árbol y todavía se puede separar otro segmento sin producir la descomposición. Para las cadenas cerradas se obtiene el siguiente teorema: «*Existen* g *cadenas simples cerradas* $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots\ldots, \mathbf{i}_g$ *de tal suerte que toda cadena cerrada es equivalente a una, y sólo a una combinación lineal*

$$m_1\,\mathbf{i}_1 + m_2\,\mathbf{i}_2 + \ldots\ldots + m_g\,\mathbf{i}_g \qquad (m_1, \ldots\ldots, m_g \text{ números enteros})$$

de las mismas».

Demostración: Sea $g > 0$, entonces existe en el complejo conexo dado C una cadena simple y cerrada $\mathbf{i}_1$, sea $\sigma_1 = a\,b$ un segmento perteneciente a $\mathbf{i}$, al suprimir σ_1, C se transforma en el complejo conexo C' para el cual el número correspondiente es $g' = g - 1$. a y b están unidos en C' por la cadena simple $\mathbf{i}'_1$ que se deduce de $\mathbf{i}_1$ por supresión de σ_1. Una cadena cerrada cualquiera $\mathbf{v}$ de C pase en total m_1 veces por σ_1. Transformaremos $\mathbf{v}$ en una cadena $\mathbf{v}'$ de C' cuando cada vez que $\mathbf{v}$ pasa por el segmento σ_1 que une a con b, sustituyamos σ_1 por el camino $-\mathbf{i}'_1$. Entonces es evidentemente

$$\mathbf{v} = m_1\,\mathbf{i}_1 + \mathbf{v}' \qquad (= \text{signo de equivalencia}).$$

Si también $g - 1 > 0$ se puede tomar en C' una cadena simple cerrada $\mathbf{i}_2$ y transformar C' en un complejo conexo C'', suprimiendo un segmento σ_2 de $\mathbf{i}_2$; se tiene así

$$\mathbf{v} = m_1\,\mathbf{i}_1 + m_2\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{v}'',$$

donde $\mathbf{v}''$ está contenida en C''. Prosiguiendo de este modo, se obtienen fácilmente g cadenas cerradas simples $\mathbf{i}_1, \ldots\ldots, \mathbf{i}_g$ y un complejo conexo $C^{(g)}$ de tal modo que toda cadena cerrada $\mathbf{v}$ de C puede representarse en la forma

$$\mathbf{v} = (m_1\,\mathbf{i}_1 + m_2\,\mathbf{i}_2 + \ldots\ldots + m_g\,\mathbf{i}_g) + \mathbf{v}^{(g)}$$

donde $\mathbf{v}^{(g)}$ está contenida en $C^{(g)}$. Pero $C^{(g)}$ es un árbol, por tanto $\mathbf{v}^{(g)}$ es equivalente a cero.

La teoría de ecuaciones lineales enseña que las ecuaciones (1) y (2) con coeficientes enteros tienen

$$g = N_1 - N_0 + 1$$

soluciones enteras independientes

$$\mathbf{i}_1 = (i_1{}^{\sigma}) \qquad \mathbf{i}_2 = (i_2{}^{\sigma}) \ldots\ldots \qquad \mathbf{i}_g = (i_g{}^{\sigma})$$

con las cuales se compone linealmente toda solución. Pues N_1 es el número de las incógnitas, y $N_0 - 1$ el número de las ecuaciones independientes que hay entre ellas. La Aritmética completa este teorema así (para cualquier sistema lineal de ecuaciones homogéneas con coeficientes enteros): las soluciones enteras fundamentales $\mathbf{i}_1, \ldots\ldots, \mathbf{i}_g$ pueden ser elegidas de tal modo que toda solución entera $\mathbf{i}$ se componga linealmente de ellas en la forma

$$\mathbf{i} = m_1\,\mathbf{i}_1 + m_2\,\mathbf{i}_2 + \ldots\ldots + m_g\,\mathbf{i}_g \quad .$$

donde los coeficientes m son *enteros*.

En nuestro caso, esto quiere decir que toda cadena cerrada puede ser compuesta mediante g, independientes entre sí $(\mathbf{i}_1 \ldots\ldots \mathbf{i}_g)$. Aquí hemos obtenido por construcción directa una tal base para las cadenas cerradas; nuestro resultado tiene sobre el que se obtendría mediante la teoría general de ecuaciones lineales, la ventaja de que la base construída está formada por cadenas cerradas simples. En el caso de tratarse de un número mayor de dimensiones sería muy difícil proceder a estas construcciones y, por consiguiente, nos apoyaremos preferentemente en la teoría de ecuaciones lineales. Con la introducción de la matriz $E = \| \varepsilon_{a\sigma} \|$ los problemas combinatorios más complicados se transforman en problemas asequibles a la Matemática mediante el formalismo sencillo y muy elaborado del Algebra.

Si E_σ es la f. e. m. introducida en el segmento σ, r_σ la resistencia de este hilo, la ley de Ohm para el circuito $\mathbf{i}_h$ da

$$(4) \qquad \sum_\sigma i_h^\sigma \, r_\sigma \, I^\sigma = \sum_\sigma i_h^\sigma E_\sigma \qquad (h = 1, 2, \ldots\ldots, g)$$

Si podemos demostrar que las $N_0 - 1$ ecuaciones independientes entre el sistema homogéneo (1), junto con las g no homogéneas (4), forman un sistema de $N_0 - 1 + g = N_1$ independientes, se seguirá que ellas determinan unívocamente las N_1 incógnitas I^σ. Y esto se deduce de que *el problema presente no es otro que el de la proyección ortogonal en un espacio* N_1 *dimensional.*

Un sistema de números $\mathbf{I} = (I^\sigma)$ coordenado a los segmentos σ de nuestra red conductora, será designado con el nombre de vector. En particular, la repartición buscada es un tal *vector.* Con el nombre de *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{I} = (I^\sigma)$ e $\overline{\mathbf{I}} = (\overline{I}^\sigma)$ designaremos la forma bilineal

$$(\mathbf{I}\overline{\mathbf{I}}) = \sum_\sigma r_\sigma \, . I^\sigma \, \overline{I}^\sigma$$

Cuando $(\mathbf{I}\overline{\mathbf{I}})$ se anula, diremos que los vectores $\mathbf{I}$ e $\overline{\mathbf{I}}$ son perpendiculares. La forma cuadrática correspondiente

$$(\mathbf{I}\mathbf{I}) = \sum_\sigma r_\sigma \, . (I^\sigma)^2$$

es definida positiva y representa el efecto Joule por unidad de tiempo, desarrollado por la repartición de corriente (I^σ). Las ecuaciones (1) definen en el espacio de N_1 dimensiones, una variedad lineal de vectores, g-dimensional, para la cual los g vectores independientes

$$\mathbf{i}_1 = (i_1^{\sigma}), \qquad \mathbf{i}_2 = (i_2^{\sigma}), \ldots\ldots, \qquad \mathbf{i}_g = (i_g^{\sigma})$$

forman una base.

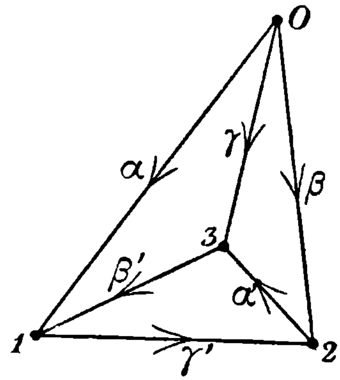
El vector $\mathbf{I}$ de la repartición de corriente pertenece a esta variedad, esto es, se tiene

$$(5) \quad \mathbf{I} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \ldots\ldots + \lambda_g \mathbf{i}_g \quad (I^{\sigma} = \lambda_1 i_1^{\sigma} + \lambda_2 i_2^{\sigma} + \ldots\ldots + \lambda_g i_g^{\sigma})$$

Si la fuerza electromotora E_{σ} existiese sola, engendraria en el hilo σ una corriente $I_0^{\sigma} = \dfrac{E_{\sigma}}{r_{\sigma}}$. Si introducimos el vector $\mathbf{I}_0 = (I_0^{\sigma})$ las ecuaciones (4) dicen que el vector $\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}$ es perpendicular a la variedad Γ (a todos los vectores de Γ). Se trata, pues, de descomponer el vector dado $\mathbf{I}_0$ en dos componentes

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{I}'$$

de los cuales el primero $\mathbf{I}$ pertenece a la variedad y el segundo $\mathbf{I}'$ es perpendicular a él; este problema de proyecciones ortogonales tiene



siempre, según los teoremas de la Geometria Analitica, una solución única. Se la obtiene sustituyendo (5) en (4)

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{g} (\mathbf{i}_h, \mathbf{i}_k)\, \lambda_k = (\mathbf{i}_h, \mathbf{I}_0) \qquad (h = 1, 2, \ldots\ldots, g)$$

Se tienen así g ecuaciones lineales para las g incógnitas λ con coeficientes simétricos $(\mathbf{i}_h, \mathbf{i}_k)$; las cuales tienen siempre una y solo una solución, porque las ecuaciones homogéneas correspondientes

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{g} (\mathbf{i}_h, \mathbf{i}_k)\, \lambda_k = 0$$

no tienen más soluciones que $\lambda = 0$. Pues multiplicando las (7) por λ_h y sumando respecto a h, se obtiene para el vector $\mathbf{I}$ definido por las (5)

$$(\mathbf{II}) = 0.$$

Por el carácter positivo del efecto Joule, se sigue de aquí $\mathbf{I} = 0$, y por tanto, $\lambda_1 = \ldots\ldots = \lambda_g = 0$. El problema de la repartición de corriente aparece así como una de las más bellas aplicaciones de la geometría n-dimensional.

Kirchhoff ha dado otra solución al problema (*); por su método se llega a una determinación del determinante D de las ecuaciones (6). Si $1, 2, \ldots\ldots, g$ es un sistema cualquiera de g segmentos, por cuya supresión la red conductora se transforma en un árbol conexo, halla que

$$D = \Sigma\,(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots\ldots \cdot r_g)$$

donde la suma se extiende a todos los sistemas de tal índole. De aquí se sigue que $D \neq 0$ y positivo.